

Exercice 1

1) a) La fonction $f(t) = e^{-t}t^{x-1}$ est continue et positive sur $[0; +\infty[$ (car $x - 1 \geq 0$)

En $+\infty$: $t^2 f(t) = t^{x+1} e^{-t} \lim_{x \rightarrow +\infty} t^2 f(t) = 0$ (c.c.) donc $f(t) = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge

donc $\int_1^{+\infty} f(t) dt$ converge. Donc $\Gamma(x)$ existe pour tout $x \geq 1$.

b) $\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^x dt$ Soit $X \geq 0$. $I(X) = \int_0^X e^{-t} t^x dt$

Ipp : $u(t) = t^x \quad v'(t) = e^{-t} \quad u'(t) = x t^{x-1} \quad v(t) = -e^{-t}$

$I(X) = [-t^x e^{-t}]_0^X + \int_0^X x t^{x-1} e^{-t} dt = -X^x e^{-X} + x \int_0^X t^{x-1} e^{-t} dt$

$\lim_{X \rightarrow +\infty} -X^x e^{-X} = 0$ (c.c.) $\lim_{X \rightarrow +\infty} \int_0^X t^{x-1} e^{-t} dt = \Gamma(x)$. Donc $\Gamma(x+1) = x \Gamma(x)$.

2) f est continue et positive sur $]-\infty; 0[$ (fonction nulle) et sur $]0; +\infty[$ (produit de fonctions continues et positives).

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_0^{+\infty} \frac{\lambda}{\Gamma(p)} e^{-\lambda x} (\lambda x)^{p-1} dx$ (si convergence)

Posons $y = \lambda x \quad x = \frac{y}{\lambda} \quad dx = \frac{1}{\lambda} dy \quad \int_0^{+\infty} \frac{\lambda}{\Gamma(p)} e^{-\lambda x} (\lambda x)^{p-1} dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\Gamma(p)} e^{-y} y^{p-1} dy$

$= \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^{+\infty} e^{-y} y^{p-1} dy$ donc l'intégrale converge et vaut $\frac{1}{\Gamma(p)} \times \Gamma(p) = 1$.

Donc $f_{p, \lambda}$ est une densité de probabilité.

3. $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_0^{+\infty} x \frac{\lambda}{\Gamma(p)} e^{-\lambda x} (\lambda x)^{p-1} dx$ (si convergence)

Avec $y = \lambda x$: $\int_0^{+\infty} \frac{y}{\lambda} \frac{\lambda}{\Gamma(p)} e^{-y} y^{p-1} \frac{dy}{\lambda} = \frac{1}{\lambda \Gamma(p)} \int_0^{+\infty} y^p e^{-y} dy$ converge et vaut

$\frac{1}{\lambda \Gamma(p)} \Gamma(p+1) = \frac{p}{\lambda}$. Donc X admet une espérance et $E(X) = \frac{p}{\lambda}$.

$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx = \int_0^{+\infty} x^2 \frac{\lambda}{\Gamma(p)} e^{-\lambda x} (\lambda x)^{p-1} dx$ (si convergence)

Avec $y = \lambda x$: $\int_0^{+\infty} \frac{y^2}{\lambda^2} \frac{\lambda}{\Gamma(p)} e^{-y} y^{p-1} \frac{dy}{\lambda} = \frac{1}{\lambda^2 \Gamma(p)} \int_0^{+\infty} y^{p+2-1} e^{-y} dy$ converge et vaut

$\frac{1}{\lambda^2 \Gamma(p)} \Gamma(p+2)$. $\Gamma(p+2) = (p+1)\Gamma(p+1) = (p+1)p\Gamma(p)$

Donc X^2 admet une espérance et $E(X^2) = \frac{(p+1)p}{\lambda^2}$

Donc X admet une variance et $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{(p+1)p}{\lambda^2} - \frac{p^2}{\lambda^2} = \frac{p}{\lambda^2}$.

Exercice 2

1. a) f est continue sur $[0; +\infty[$, donc F est de classe C^1 sur $[0; +\infty[$ et $F' = f$.

Donc $(1 - F)' = -f$.

b) Ipp $\begin{cases} u(t) = -t \\ v'(t) = -f(t) \end{cases} \quad \begin{cases} u'(t) = -1 \\ v(t) = 1 - F(t) \end{cases}$

Donc $\int_0^x t f(t) dt = [-t(1 - F(t))]_0^x + \int_0^x (1 - F(t)) dt = -x(1 - P(X \leq x)) + \int_0^x (1 - F(t)) dt$

$= -xP(X > x) + \int_0^x (1 - F(t)) dt$

2) a) ϕ est une primitive de $g(x) = xf(x)$ donc $\phi'(x) = xf(x) \geq 0$ donc ϕ est croissante sur $[0; +\infty[$

b) $\phi(x) = \int_0^x (1 - F(t))dt - xP(X > x) \leq \int_0^x (1 - F(t))dt$ (car $-xP(X > x) \leq 0$)

Comme $(1 - F(t)) \geq 0$ (car $F(t) \geq 0$) $\int_0^x (1 - F(t))dt \leq \int_0^{+\infty} (1 - F(t))dt$

Donc $\phi(x)$ est majorée par $\int_0^{+\infty} (1 - F(t))dt$.

$\phi(x)$ est croissante et majorée, donc a une limite finie en $+\infty$. Donc $\int_0^{+\infty} tf(t)dt$ converge.

Comme $\int_{-\infty}^0 tf(t)dt$ converge et vaut 0, $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt$ converge, donc X admet une espérance.

c) On sait déjà que $xP(X > x) \geq 0$

Pour tout $t \geq x$ $tf(t) \geq xf(t)$ (car $f \geq 0$) donc par croissance de l'intégrale (les 2 convergent)

$$\int_x^{+\infty} tf(t)dt \geq \int_x^{+\infty} xf(t)dt \quad \int_x^{+\infty} tf(t)dt \geq xP(X > x) \quad \int_x^{+\infty} tf(t)dt = \int_0^{+\infty} tf(t)dt - \int_0^x tf(t)dt$$

$$\int_0^{+\infty} tf(t)dt \text{ converge donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x tf(t)dt = \int_0^{+\infty} tf(t)dt \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{+\infty} tf(t)dt = 0.$$

Par encadrement $\lim_{x \rightarrow +\infty} xP(X > x) = 0$. En passant à la limite dans la question 1b., on obtient :

$$E(X) = \int_0^{+\infty} (1 - F(t))dt.$$

3. a) F_n est de classe C^1 sur $]-\infty; 0[$ (fonction nulle) et sur $]0; +\infty[$ (produit de fonctions de classe C^1).

En 0 : $\lim_{x \rightarrow 0} 1 - e^{-x} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = 1 - 1 = 0$ donc F est continue sur $\mathbb{R}$.

Donc F_n est la fonction de répartition d'une variable à densité.

b) f vérifie les conditions de la question 1.

$$\forall t \geq 0, 1 - F(t) = e^{-t} \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n = e^{-t} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{t}{n}\right)^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^n \frac{\binom{n}{k}}{n^k} t^k e^{-t}$$

Donc par linéarité $\int_0^{+\infty} (1 - F(t))dt$ converge et $\int_0^{+\infty} (1 - F(t))dt = \sum_{k=0}^n \frac{\binom{n}{k}}{n^k} \times k! = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{n^k (n-k)!}$

D'après le résultat de la question 2, T_n admet une espérance et $E(T_n) = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{n^k (n-k)!}$