

Exercice 1 - Loi Gamma

1. a) Soit $x \in [1; +\infty[$. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t^x-1} dt$ est convergente.

b) On appelle Γ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\forall x \geq 1, \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$

Montrer que : $\forall x \geq 1, \Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x)$.

Soit $\lambda \in]0; +\infty[$ et $p \in [1; +\infty[$. On dit que X suit la loi Gamma de paramètres λ et p si X admet pour

densité la fonction $f_{p,\lambda}$ définie par : $f_{p,\lambda}(x) = \begin{cases} \frac{\lambda}{\Gamma(p)} e^{-\lambda x} (\lambda x)^{p-1} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$.

Dans ce cas, on note $X \longrightarrow \Gamma(\lambda, p)$.

2. Montrer que $f_{p,\lambda}$ est bien une densité de probabilité.

3. Si $X \longrightarrow \Gamma(\lambda, p)$, montrer que X admet une espérance et une variance, et montrer que

$$E(X) = \frac{p}{\lambda} \text{ et } V(X) = \frac{p}{\lambda^2}.$$

Exercice 2

Soit X une variable aléatoire, à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, de densité f (nulle sur $]-\infty; 0[$) et de fonction de répartition F . On suppose, de plus, que f est continue sur $[0; +\infty[$.

On pose, pour tout réel x positif, $\phi(x) = \int_0^x t \cdot f(t) dt$.

1. a) Montrer que $1 - F(t)$ est une primitive de $-f$ sur $[0; +\infty[$

b) Montrer, grâce à une intégration par parties, que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \phi(x) = \int_0^x (1 - F(t)) dt - xP(X > x)$$

2. On suppose dans cette question, que l'intégrale $\int_0^{+\infty} (1 - F(t)) dt$ converge.

a. Montrer que la fonction ϕ est croissante sur $\mathbb{R}^+$.

b. Montrer que ϕ est majorée et en déduire que X a une espérance.

c. Montrer que : $\forall x \geq 0, 0 \leq x \cdot P(X > x) \leq \int_x^{+\infty} t \cdot f(t) dt$

En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot P(X > x) = 0$, puis montrer que $E(X) = \int_0^{+\infty} (1 - F(t)) dt$

3. Pour $n \geq 1$, soit (T_n) une variable aléatoire de fonction de répartition :
$$\begin{cases} F_n(x) = 0 & \text{si } x < 0 \\ F_n(x) = 1 - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

a) Vérifier que T_n est une variable à densité.

b) On admet que $\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^{+\infty} e^{-t} t^n dt$ converge et vaut $n!$

Montrer que T_n admet une espérance et que $E(T_n) = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{n^k(n-k)!}$