Exercice 1

Soit X une variable aléatoire de fonction de répartition $F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{x}{x+1} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Montrer que X est une variable à densité, et déterminer une densité de X .

Exercice 2

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

- 1) Montrer que f peut être considérée comme densité d'une variable aléatoire X .
- 2) Déterminer la fonction de répartition de X .

Exercice 3 (Loi de Pareto)

Soit x_0 et α deux réels strictement positifs.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha x_0^\alpha}{x^{\alpha+1}} & \text{si } x \geq x_0 \\ 0 & \text{si } x < x_0 \end{cases}$.

1. Vérifier que f est une densité de probabilité.
Dans la suite, on considère une variable aléatoire X qui admet f pour densité. On dit que X suit la loi de Pareto de paramètres α et x_0 .
- 2) a) Déterminer la fonction de répartition de X et la fonction $g : x \mapsto P(X > x)$
- b) Montrer que, pour tous $x \geq x_0$ et $y \geq 0$, $P_{(X > x)}(X > x + y) = \left(\frac{x}{x+y}\right)^\alpha$.

Exercice 4 (Loi de Laplace)

Soit λ un réel strictement positif et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \frac{\lambda}{2} \exp(-\lambda|t|)$.

- 1) Montrer que f est une densité de probabilité.
- 2) Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et qui admet f comme densité (on dit que X suit une loi de Laplace de paramètre λ et on note $X \rightarrow \mathcal{L}(\lambda)$).
Déterminer la fonction de répartition de X .

Exercice 5

Soit X une VAR qui suit la loi de densité f de l'exercice 2.

- 1) Montrer que X admet une espérance et la déterminer.
- 2) Montrer que X admet une variance et la déterminer.

Exercice 6

Soit X une VAR qui suit la loi de densité f de l'exercice 1.
 X admet-elle une espérance ?

Exercice 7

Soit $\alpha > 0$, $x_0 > 0$ et X une VAR qui suit la loi de Pareto de paramètres α et x_0 (ex 3).

- 1) Déterminer les valeurs de α pour lesquelles X possède une espérance, puis calculer $E(X)$ lorsqu'elle existe.
- 2) Déterminer les valeurs de α pour lesquelles X possède une variance, puis calculer $V(X)$ lorsqu'elle existe.

Exercice 8

Soit $\lambda > 0$ et X une V.A.R. qui suit la loi de Laplace de paramètre λ (ex 4).

- 1) Montrer que X possède une espérance et donner sa valeur.
- 2) Montrer que X possède une variance et donner sa valeur.