Exercice 1

On rappelle (feuille 1 ex 3) que si X est une V.A.R. qui suit la loi de Pareto de paramètres α et x_0 , alors

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < x_0 \\ 1 - \frac{x_0^\alpha}{x^\alpha} & \text{si } x \geq x_0 \end{cases}$$

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de Pareto de paramètres $\alpha = 2$ et $x_0 = 3$.

1) Soit $U = 3 - X$.

a) Déterminer la fonction de répartition de U .

b) Montrer que U est une variable à densité, et préciser une densité.

2) Soit $\lambda > 0$. Montrer que $V = \lambda X$ suit une loi de Pareto dont on précisera les paramètres.

3) Montrer que $Y = X^2$ suit une loi de Pareto dont on précisera les paramètres.

4) Soit $Z = \ln\left(\frac{X}{3}\right)$. Déterminer la fonction de répartition de Z .

(On verra au prochain chapitre qu'il s'agit d'une loi exponentielle)

Exercice 2 (En plus)

Soit X une V.A.R. à densité, de fonction de répartition $F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -2 \\ \frac{x+2}{4} & \text{si } -2 \leq x \leq 2 \\ 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

On pose $Y = X^2$ et $Z = \exp(X)$.

On admet que Y et Z sont aussi des variables à densité.

1) a) Déterminer la fonction de répartition de Y .

b) Déterminer une densité de Y .

2) a) Déterminer la fonction de répartition de Z .

b) Déterminer une densité de Z .

Exercice 3

On rappelle (feuille 1 ex 3) que si X est une V.A.R. qui suit la loi de Pareto de paramètres α et x_0 , alors

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < x_0 \\ 1 - \frac{x_0^\alpha}{x^\alpha} & \text{si } x \geq x_0 \end{cases}$$

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes qui suivent la même loi de Pareto de paramètres $\alpha = 2$ et $x_0 = 2$.

1) Soit Z_1 la variable aléatoire égale au plus grand des deux nombres X et Y .

a) Déterminer la fonction de répartition de Z_1 .

b) (En plus) Montrer que Z_1 est une variable à densité, et préciser une densité.

2) Soit Z_2 la variable aléatoire égale au plus petit des deux nombres X et Y .

a) Déterminer la fonction de répartition de Z_2 .

b) En déduire que Z_2 suit une loi de Pareto dont on précisera les paramètres.