Chapitre 15 : Variables aléatoires à densité

1. Densité d'une V.A.R.

1.1 Fonction de répartition d'une variable à densité

Rappel :

Soit X une VAR quelconque.
Sa fonction de répartition F_X est définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) = P(X \leq x)$.
On a alors :
_ F_X est croissante sur $\mathbb{R}$,
_ $\lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$.
_ si $a < b$, $P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$.

Remarque :
Attention, de manière générale, une fonction de répartition n'est pas continue sur $\mathbb{R}$, et n'est pas non plus strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (Pensez au cas d'une variable discrète)

Définition :

Soit X une V.A.R. de fonction de répartition F_X.
Si : $\begin{cases} \textbf{$F_X$ est continue sur $\mathbb{R}$} \\ \textbf{F_X est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf en un nombre fini de points} \end{cases}$
alors X est une V.A.R. à densité.
Dans ce cas, toute fonction f_x définie sur $\mathbb{R}$, positive sur $\mathbb{R}$, et **égale à F_X' sur $\mathbb{R}$ sauf en un nombre fini de points** est appelé **densité de X**.

Remarque :
Si F_X est la fonction de répartition d'une VAR à densité, il ne faut pas confondre :
_ la dérivée F_X', définie seulement sur les intervalles sur lesquels F_X est dérivable
_ la densité f_X définie sur $\mathbb{R}$ (on prolongera F_X' en ajoutant des valeurs aux points où elle n'est pas définie)

Ex : Soit X une VAR dont la fonction de répartition est : $F_X(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 2 \\ 1 - \dfrac{2}{x} \text{ si } x \geq 2 \end{cases}$
Montrer que X est une variable à densité et déterminer une densité de X.

F_X est continue et de classe C^1 sur $]-\infty;2[$ (fonction nulle) et sur $]2;+\infty[$ (différence d'une constante et d'un quotient de fonctions affines).
$\lim\limits_{x \to 2, x < 2} 0 = 0$ $\quad \lim\limits_{x \to 2, x \geq 2} 1 - \dfrac{2}{x} = 0$ donc F_X est continue en 2.
Donc F_X est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf en 2.
Donc X est une variable à densité.
$F_X'(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 2 \\ \dfrac{2}{x^2} \text{ si } x > 2 \end{cases}$ donc une densité de X est donnée par : $f_x(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 2 \\ \dfrac{2}{x^2} \text{ si } x \geq 2 \end{cases}$

1.2 Densité de probabilité

Rappel :
Soit $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels.

La suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définit une loi de probabilité si et seulement si : $\begin{cases} \forall\, n \in \mathbb{N},\ p_n \geq 0 \\ \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1 \end{cases}$

Propriété : **TRES IMPORTANT**

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Si :
1) f est **positive sur $\mathbb{R}$.**
2) f est **continue sur $\mathbb{R}$ sauf en un nombre fini de points.**
3) $\int_{-\infty}^{+\infty}$ **f(x)dx converge et vaut 1.**

Alors f est une densité de probabilité d'une variable aléatoire X.

Exemple :

Soit f $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 1 \\ \dfrac{3}{x^4} \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$

Montrer que f est une densité de probabilité.

f est nulle sur $]-\infty\,;1[$ et $f(x) = \dfrac{3}{x^4} \geq 0$ sur $[1\,;+\infty[$. Donc f est positive sur $\mathbb{R}$.

f est continue sur $]-\infty\,;1[$ (fonction nulle) et sur $]1\,;+\infty[$ (quotient de fonctions continues).

$\int_{-\infty}^{1} f(x)dx = \int_{-\infty}^{1} 0dx$ converge et vaut 0.

$\int_{1}^{+\infty} f(x)dx = \int_{1}^{+\infty} \dfrac{3}{x^4}dx$ converge car $4 > 1$ et $\int_1^X \dfrac{3}{x^4}dx = \int_1^X 3x^{-4} = \left[-\dfrac{3x^{-3}}{3}\right]_1^X = -\dfrac{1}{X^3} + 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} -\dfrac{1}{X^3} + 1 = 1$ donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ converge et vaut $0 + 1 = 1$.

Donc f est une densité de probabilité.

Propriété : TRES IMPORTANT

> Soit X une variable aléatoire de densité de probabilité f_X.
> Alors $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\mathbf{F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt}$.

Exemple : Suite de l'exemple précédent :
Soit X une V.A.R. qui admet f comme densité de probabilité. Déterminer la fonction de répartition de X.

$\forall\, x \in \mathbb{R}$, $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$

si $x < 1$, $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} 0dt = 0$

si $x \geq 1$, $F_X(x) = \int_{-\infty}^{1} f(t)dt + \int_{1}^{x} f(t)dt = 0 + \int_{1}^{x} \frac{3}{t^4}dt = 1 - \frac{1}{x^3}$.

Donc $F_X(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 1 \\ 1 - \frac{1}{x^3} \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$

Remarque : Quand on trouve F_X, on vérifie toujours dans sa tête que : $\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} F_X(x) = 1 \\ F_X \text{ continue sur } \mathbb{R} \end{cases}$

(car toute fonction de répartition a pour limite 0 en $-\infty$ et 1 en $+\infty$, et que toute fonction de répartition d'une variable à densité est continue sur $\mathbb{R}$)

Vérification dans l'exemple précédent :

$\lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} 0 = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} F_X(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} 1 - \frac{1}{x^3} = 1$

Point de discontinuité possible : 1

$\lim\limits_{x \to 1,\, x<1} F_X(x) = \lim\limits_{x \to 1,\, x<1} 0 = 0 \qquad \lim\limits_{x \to 1,\, x\geq 1} F_X(x) = \lim\limits_{x \to 1,\, x\geq 1} 1 - \frac{1}{x^3} = 0$ F_X continue

Propriété (Régularité de la fonction de répartition)

> Si f_X est une densité de probabilité d'une variable aléatoire X, alors :
> 1) **F_X est continue sur $\mathbb{R}$**
> 2) **F_X est de classe C^1 sur tout intervalle sur lequel f_X est continue**, et sur chaque intervalle,
> **$F_X'(x) = f(x)$**.

Ex : Vérification sur l'exemple précédent : $f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 1 \\ \frac{3}{x^4} \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$ (continue sur $]-\infty;1[$ et $]1;+\infty[$

On a trouvé : $F_X(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 1 \\ 1 - \frac{1}{x^3} \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$

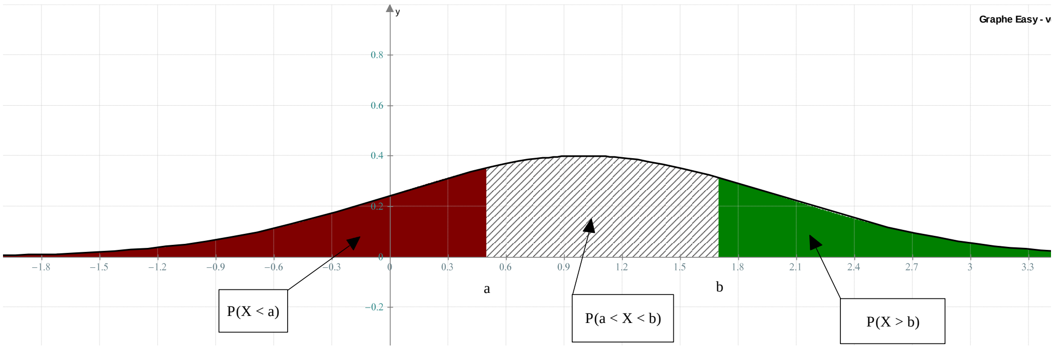
On voit que F_X est de classe C^1 sur $]-\infty;1[$ et sur $]1;+\infty[$ et que :

$\forall\, x < 1$, $F_X'(x) = 0 = f(x)$ $\qquad \forall\, x > 1$, $F_X'(x) = 0 - \left(-\frac{3}{x^4}\right) = \frac{3}{x^4} = f(x)$ $\qquad x^{-3} \longrightarrow (-3x^{-4}) = -\frac{3}{x^4}$

1.3 Probabilité d'être dans un intervalle

Propriété :

Soit X une V.A.R. qui admet une densité de probabilité f_X.
Alors $\forall a \in \mathbb{R}$, $\forall b \in \mathbb{R}$ avec $a \leq b$,
1) $P(X = a) = 0$
2) $P(X < a) = P(X \leq a) = F_X(a) = \int_{-\infty}^{a} f_X(t)dt$
3) $P(X \geq a) = P(X > a) = 1 - F_X(a) = \int_{a}^{+\infty} f_X(t)dt$.
4) $P(a \leq X \leq b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X < b) = F_X(b) - F_X(a) = \int_a^b f_X(x)dx$



Remarques :
_ donc, si I est un intervalle, alors $\mathbf{P(X \in I) = \int_I f_X(x)dx}$
_ si sur un intervalle I, $f_X(x) = 0$, alors $P(X \in I) = \int_I 0dx = 0$.
_ inversement, si $f_X(x) = 0\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus I$, (f est à support sur I) alors $P(X \in I) = 1$,
Dans ce cas, on dit que X est à valeurs dans I.

A retenir :
Si f_X est une densité de X, X prend ses valeurs sur les intervalles sur lesquels f_X est non nulle.

Propriété :

Soit X une variable aléatoire de densité f_X.
On suppose que **f_X est nulle en dehors d'un intervalle]a;b[**, (ou [a;b], [a;b[,]a;b]), $-\infty \leq a < b \leq +\infty$.
Alors : $\begin{cases} \forall x < a, F_X(x) = 0 \\ \forall x > b, F_X(x) = 1 \end{cases}$

*Si f_X est nulle en dehors de I, **$F_X(x) = 0$ "avant I" et $F_X(x) = 1$ "après I"***

Exemple :

On a vu dans l'exercice 2 feuille 1 que $f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ 2x \text{ si } x \in [0,1] \\ 0 \text{ si } x > 1 \end{cases}$ est une densité de probabilité.
Soit X une VAR de densité f. Déterminer $F_X(x)$ pour $x < 0$ et $x > 1$.

f est nulle en dehors de [0,1], donc X est à valeurs dans [0;1].
Donc $F_X(x) = 0$ si $x < 0$ et $F_X(x) = 1$ si $x \geq 1$.

2. Espérance et variance d'une variable aléatoire à densité

2.1 Espérance

Définition :

Soit X une V.A.R. de densité f_X.
Si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)dx$ est absolument convergente, on dit que X admet une espérance.
Dans ce cas, l'espérance de X est définie par : $\mathbf{E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x.f_X(x)dx}$.

Ex : Soit X une variable aléatoire de densité $f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 1 \\ \dfrac{3}{x^4} \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$. Montrer que X admet une espérance et déterminer E(X).

$\int_{-\infty}^{1} x.f(x)dx = \int_{-\infty}^{1} 0dx$ converge et vaut 0.

$\int_{1}^{+\infty} x.f(x)dx = \int_{1}^{+\infty} \frac{3}{x^3}dx$ converge car 3 > 1, et :

$\forall\ T \geq 1, \int_1^T \frac{3}{x^3}dx = \int_1^T 3x^{-3}dx = \left[\frac{-3}{2x^2}\right]_1^T = -\frac{3}{2T^2} + \frac{3}{2} \quad \lim\limits_{T\to+\infty} -\frac{3}{2T^2} + \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$ donc X admet une espérance et E(X) $= 0 + \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$.

Remarques :
_ E(X) représente la "valeur moyenne" de X. Attention à la cohérence !
_ si f_X est paire alors $x \longmapsto x.f_X(x)$ est impaire.
Dans cas si l'intégrale $\int_0^{+\infty} x.f_X(x)dx$ converge, alors X admet une espérance et E(X) = 0.

Rappel :
Soit X une variable aléatoire discrète et g une fonction définie sur $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$.
Si $\sum\limits_{i \in I} g(x_i)P(X = x_i)$ est finie ou converge absolument, alors Y = g(X) admet une espérance et
$E(Y) = E(g(X)) = \sum\limits_{i \in I} g(x_i)P(X = x_i)$

Théorème de transfert :

Soit X une V.A.R. qui admet une densité f_X nulle en dehors d'un intervalle]a;b[(avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$) et soit g une fonction continue sur]a;b[sauf en un nombre fini de points. La variable aléatoire Y = g(X) admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\int_a^b g(x)f_X(x)dx$ est absolument convergente.
Dans ce cas, E(Y) = $\mathbf{E(g(X)) = \int_a^b g(x)f_X(x)dx}$.

Remarque :
En particulier, la fonction $g(x) = x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$.
Donc, d'après le théorème de transfert, X^2 admet une espérance si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)dx$ converge absolument.
Dans ce cas, $E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)dx$.

Ex : suite de l'ex. précédent : X admet pour densité : $f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 1 \\ \dfrac{3}{x^4} \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$

X^2 et X^3 admettent-elles une espérance ? Si oui, les déterminer.

f est nulle en dehors de $[1; +\infty[$.

$\int_1^{+\infty} x^2 f(x)dx = \int_1^{+\infty} \frac{3}{x^2}dx$ converge (absolument) et $\forall$ T ≥ 1, $\int_1^T \frac{3}{x^2}dx = \left[-\frac{3}{x}\right]_1^T = -\frac{3}{T} + 3$.

$\lim\limits_{T\to+\infty} -\frac{3}{T} + 3 = 3$ donc $E(X^2)$ existe et vaut 0 + 3 = 3.

– $\int_1^{+\infty} x^3 f(x)dx = \int_1^{+\infty} \frac{3}{x}dx$ diverge donc $E(X^3)$ n'existe pas.

Propriété : (Linéarité de l'espérance)

Soit X une V.A.R. à densité et a, b deux réels.
Si X admet une espérance, alors aX + b aussi et **E(aX + b) = aE(X) + b**.

2.2 Variance

Définition :

Soit X une V.A.R. à densité qui admet une espérance E(X).
Si $(X - E(X))^2$ admet une espérance, alors on dit que X admet une variance.
La variance de X est alors : $\mathbf{V(X) = E\left((X - E(X))^2\right)}$
L'écart-type de X est alors : $\boldsymbol{\sigma(X) = \sqrt{V(X)}}$.

Propriété (Formule de König-Huygens)

Soit X une V.A.R. à densité qui admet une espérance E(X). Alors V(X) existe si et seulement si $E(X^2)$ existe. Dans ce cas, $\mathbf{V(X) = E(X^2) - E(X)^2}$.

Ex : suite de l'ex précédent. Montrer que X admet une variance et déterminer V(X).
X et X^2 admettent des espérances et $E(X) = \frac{3}{2}$ $E(X^2) = 3$.
Donc X admet une variance et $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 3 - \frac{9}{4} = \frac{3}{4}$.

Propriété :

Soit X une V.A.R. à densité et a, b deux réels.
Si X admet une variance, alors aX + b admet une variance et :
$\mathbf{V(aX + b) = a^2V(X)}$ $\quad$ $\boldsymbol{\sigma(aX + b) = |a|\sigma(X)}$.

Définition : Soit X une V.A.R. à densité.

Si X admet une espérance et si **E(X) = 0**, on dit que X est **centrée**.
Si X admet un écart-type et si **σ(X) = 1**, on dit que X est **réduite**.

Propriété :

Si X une V.A.R. à densité. d'espérance m et d'écart-type non nul s, alors $X^* = \frac{X - m}{s}$ est une variable aléatoire centrée réduite.

Démonstration : $X^* = \frac{1}{s} X - \frac{m}{s}$ $E(X^*) = \frac{1}{s} E(X) - \frac{m}{s} = \frac{m}{s} - \frac{m}{s} = 0$ $\quad$ $\sigma(X^*) = \frac{1}{|s|}\sigma(X) = \frac{1}{s} s = 1$.

3. Fonctions d'une V.A.R. à densité

3.1 Principe général

Rappels :
_ Soit X une V.A.R. de fonction de répartition F_X.

Si : $\begin{cases} \mathbf{F_X \text{ est continue sur } \mathbb{R}} \\ \mathbf{F_X \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ sauf en un nombre fini de points}} \end{cases}$

alors X est une V.A.R. à densité.
Dans ce cas, toute fonction f_x définie sur $\mathbb{R}$, positive sur $\mathbb{R}$, et **égale à F_X' sur $\mathbb{R}$ sauf en un nombre fini de points** est appelé **densité de X**.

_ Soit X une V.A.R. à densité et a et b deux réels tels que $a \leq b$.

Alors : $P(X \leq a) = P(X < a) = F_X(a)$

$P(X \geq b) = P(X > b) = 1 - F_X(b)$

$P(a \leq X \leq b) = P(a < X < b) = P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$

Méthode :

Soit X une V.A.R. à densité, de densité f.
Soit g une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On pose **Y = g(X)**. On cherche la **loi de Y**.
Pour cela :

1) on cherche la fonction de répartition de Y :
_ pour $y \in \mathbb{R}$, on cherche $P(Y \leq y) = P(g(X) \leq y)$
_ on résout l'inéquation $g(X) \leq y$ (**attention aux différents cas**).
_ on obtient $P(X \leq i(y)) = F_X(i(y))$ ou $P(X \geq h(y) = 1 - F_X(h(y))$ ou $P(h(y) \leq X \leq i(y)) = F_X(i(y)) - F_X(h(y))$
_ on termine à l'aide de la fonction de répartition de X. (**attention aux différents cas**)

2) _ soit on reconnaît une loi usuelle (la loi d'une variable aléatoire est entièrement déterminée par sa fonction de répartition)
_ soit : si F_Y est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sauf en un nombre fini de points, Y est une VAR à densité, et on trouve sa densité.

3.2 Y = aX + b

Soit X une variable à densité. Soit $a \neq 0$ et $b \in \mathbb{R}$. On pose Y = aX + b.
On cherche la loi de Y.

Méthode :

Soit $y \in \mathbb{R}$. $F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(aX + b \leq y) = P(aX \leq y - b)$

si $a > 0$: $P(Y \leq y) = P\left(X \leq \dfrac{y-b}{a}\right) = F_X\left(\dfrac{y-b}{a}\right)$ si $a < 0$: $P(Y \leq y) = P\left(X \geq \dfrac{y-b}{a}\right) = 1 - F_X\left(\dfrac{y-b}{a}\right)$

Il faut ensuite regarder où se situe $\dfrac{y-b}{a}$.

Ex : Soit X la VAR aléatoire du 1er exemple : $F_X(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 1 \\ 1 - \dfrac{1}{x^3} \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$

Posons Y = -3X + 1. Loi de Y ?

Soit $y \in \mathbb{R}$. $P(Y \leq y) = P(-3X + 1 \leq y) = P(-3X \leq y - 1) = P\left(X \geq \dfrac{-y+1}{3}\right) = 1 - F_X\left(\dfrac{-y+1}{3}\right)$

$\dfrac{-y+1}{3} \geq 1 \Leftrightarrow -y + 1 \geq 3 \Leftrightarrow -y \geq 2 \Leftrightarrow y \leq -2$.

_ Si $y \leq -2$ $\dfrac{-y+1}{3} \geq 1$ $F_Y(y) = 1 - \left(1 - \dfrac{1}{\left(\dfrac{1-y}{3}\right)^3}\right) = \dfrac{27}{(1-y)^3}$

_ si $y > -2$ $\dfrac{-y+1}{3} < 1$ $F_Y(y) = 1 - 0 = 1$. $F_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{27}{(1-y)^3} \text{ si } y \leq -2 \\ 1 \text{ si } y > -2 \end{cases}$

F_Y continue et de classe C^1 sur $]-\infty;2[$ (quotient de fonctions de classe C^1) et sur $]2;+\infty[$ (fonction constante).

$\lim\limits_{y \to -2} \dfrac{27}{(1-y)^3} = \dfrac{27}{3^3} = 1$ $\lim\limits_{y \to -2} 1 = 1$ donc F_Y continue en -2.

F_Y est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en -2, donc Y est variable à densité et $f_Y = \begin{cases} \dfrac{27 \times (-3)(-1)}{(1-y)^4} = \dfrac{81}{(1-y)^4} \text{ si } y \leq -2 \\ 0 \text{ si } y > -2 \end{cases}$

Remarque :
X est à valeurs dans $[1;+\infty[$ (car sa densité est nulle sur $]-\infty;1[$).
$X \geq 1$ donc $-3X \leq -3$ $-3X + 1 \leq -2$ $Y \leq -2$.
Donc $F_Y(y) = 1$ si $y > -2$

3.3 $Y = X^2$

Rappel :

Soit $a \in \mathbb{R}$. $\begin{cases} \text{Si } a < 0 \text{ l'équation } x^2 \leq a \text{ n'a pas de solutions} \\ \text{si } a \geq 0 : x^2 \leq a \Leftrightarrow -\sqrt{a} \leq x \leq \sqrt{a} \end{cases}$

Soit X une V.A.R. à densité. On pose $Y = X^2$. Loi de Y ?

$\forall y \in \mathbb{R}$, $P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y)$

_ si $y < 0$, $P(X^2 \leq y) = 0$

_ si $y \geq 0$, $P(X^2 \leq y) = P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) = P(X \leq \sqrt{y}) - P(X \leq -\sqrt{y}) = F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y})$

Exemple : Avec l'exemple précédent :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 1 \\ 1 - \dfrac{1}{x^3} \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$$

Posons $Y = X^2$. Déterminer la fonction de répartition de Y.

$\forall y \in \mathbb{R}$, $P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y)$

_ si $y < 0$ $P(X^2 \leq y) = 0$

_ si $y \geq 0$, $P(X^2 \leq y) = P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) = P(X \leq \sqrt{y}) - P(X \leq -\sqrt{y})$

$F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y})$

$\sqrt{y} \geq 1 \Leftrightarrow y \geq 1$ $\forall y \geq 0$ $-\sqrt{y} \leq 0$

Donc si $y \geq 1$, $P(Y = y) = 1 - \left(\dfrac{1}{\sqrt{y}}\right)^3 - 0 = 1 - \dfrac{1}{y\sqrt{y}}$

si $0 \leq y < 1$ $P(Y = y) = 0 - 0 = 0$ Donc $F_Y(y) = \begin{cases} 0 \text{ si } y < 1 \\ 1 - \dfrac{1}{y\sqrt{y}} \text{ si } y \geq 1 \end{cases}$

Remarque : $X \geq 1$ donc $X^2 \geq 1$ $Y \geq 1$ donc $F_Y(y) = 0$ si $y < 1$.

3.4 $Y = \exp(X)$, $Y = |X|$

Rappels :

Soit $a \in \mathbb{R}$.

_ l'inéquation $e^x \leq a$ $\begin{cases} \text{n'a pas de solutions si } a \leq 0 \\ \Leftrightarrow x \leq \ln(a) \text{ si } a > 0 \end{cases}$

_ l'inéquation $|x| \leq a$ $\begin{cases} \text{n'a pas de solution si } a < 0 \\ \Leftrightarrow -a \leq x \leq a \text{ si } a \geq 0 \end{cases}$

3.5 Min, max de deux VAR à densité

Définition

Soit X_1 , X_2 deux variables aléatoires.
Si pour tout intervalle réel I et J, $P\big((X_1 \in I) \cap (X_2 \in J)\big) = P(X_1 \in I)P(X_2 \in J)$, on dit que X_1 et X_2 sont indépendantes.

Dans ce cas, on a en particulier : $\forall x \in \mathbb{R}$, $P((X_1 \leq x)\cap(X_2 \leq x)) = P(X_1 \leq x)P(X_2 \leq x)$.
$P((X_1 > x)\cap(X_2 > x)) = P(X_1 > x)P(X_2 > x)$.

Principe :

Soit X_1 , X_2 deux VAR à densité.
_ si on pose $\mathbf{Y = \max(X_1, X_2)}$, alors
$\forall t \in \mathbb{R}$, **$(Y \leq t)$ = "les deux sont $\leq t$" = $(X_1 \leq t) \cap (X_2 \leq t)$**
_ si on pose $\mathbf{Z = \min(X_1, X_2)}$ alors
$\forall t \in \mathbb{R}$, **$(Z > t)$ = "les deux sont $> t$" = $(X_1 > t) \cap (X_2 > t)$**

Exemple :
Soit X_1 et X_2 deux VAR indépendantes, qui suivent la même loi de densité :

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 1 \\ \dfrac{3}{x^4} \text{ si } x \geq 1 \end{cases}. \quad \left(\text{donc } F_X(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 1 \\ 1 - \dfrac{1}{x^3} \text{ si } x \geq 1 \end{cases}\right)$$

a) On pose $Y = \max(X_1, X_2)$. Déterminer F_Y. Y est-elle une variable à densité ?
b) On pose $Z = \min(X_1, X_2)$. Déterminer F_Z.

a) $\forall t \in \mathbb{R}$, $(Y \leq t)$ = "les deux sont $\leq t$" = $(X_1 \leq t) \cap (X_2 \leq t)$
X_1, X_2 indépendants : $F_Y(t) = P(Y \leq t) = P(X_1 \leq t)P(X_2 \leq t)$ $\quad F_Y(t) = F_{X1}(t)F_{X2}(t) = F_{X1}(t)^2$

$$F_Y(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t < 1 \\ \left(1 - \dfrac{1}{t^3}\right)^2 \text{ si } t \geq 1 \end{cases}$$

$F_Y = F_{X1}{}^2$
f_{X1} est continue sur $\mathbb{R}$ sauf en 1, donc F_{X1} est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf en 1.
Donc F_Y est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf en 1.
Donc Y est une VAR à densité.

b) $\forall t \in \mathbb{R}$, $F_Z(t) = P(Z \leq t) = 1 - P(Z > t) = 1 - P((X_1 > t) \cap (X_2 > t))$
$= 1 - P(X_1 > t)P(X_2 > t)$ (indépendants)
$= 1 - (1 - F_{X1}(t))(1 - F_{X2}(t))$
$= 1 - (1 - F_{X1}(t))^2$

Si $t < 1$ $F_Z(t) = 1 - (1 - 0)^2 = 0$

Si $t \geq 1$ $F_Z(t) = 1 - \left(1 - \left(1 - \dfrac{1}{t^3}\right)\right)^2 = 1 - \dfrac{1}{t^6}$

$$\text{Donc } F_Z(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t < 1 \\ 1 - \dfrac{1}{t^6} \text{ si } t \geq 1 \end{cases}$$