

Chapitre 15 : Variables aléatoires à densité

1. Densité d'une V.A.R.

1.1 Fonction de répartition d'une variable à densité

Rappel :

Soit X une VAR quelconque.

Sa fonction de répartition F_X est définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) = P(X \leq x)$.

On a alors :

- F_X est croissante sur $\mathbb{R}$,
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$.
- si $a < b, P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$.

Remarque :

Attention, de manière générale, une fonction de répartition n'est pas continue sur $\mathbb{R}$, et n'est pas non plus strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (Pensez au cas d'une variable discrète)

Définition :

Soit X une V.A.R. de fonction de répartition F_X .

Si : $\begin{cases} F_X \text{ est continue sur } \mathbb{R} \\ F_X \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ sauf en un nombre fini de points} \end{cases}$

alors X est une V.A.R. à densité.

Dans ce cas, toute fonction f_x définie sur $\mathbb{R}$, positive sur $\mathbb{R}$, et égale à F_X' sur $\mathbb{R}$ sauf en un nombre fini de points est appelé **densité de X** .

Remarque :

Si F_X est la fonction de répartition d'une VAR à densité, il ne faut pas confondre :

- la dérivée F_X' , définie seulement sur les intervalles sur lesquels F_X est dérivable
- la densité f_X définie sur $\mathbb{R}$ (on prolongera F_X' en ajoutant des valeurs aux points où elle n'est pas définie)

Ex : Soit X une VAR dont la fonction de répartition est : $F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 2 \\ 1 - \frac{2}{x} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

Montrer que X est une variable à densité et déterminer une densité de X .

1.2 Densité de probabilité

Rappel :

Soit $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels.

La suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définit une loi de probabilité si et seulement si :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, p_n \geq 0 \\ \sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1 \end{cases}$$

Propriété : **TRES IMPORTANT**

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Si :

- 1) f est **positive sur $\mathbb{R}$** .
- 2) f est **continue sur $\mathbb{R}$ sauf en un nombre fini de points**.
- 3) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ **converge et vaut 1**.

Alors f est une densité de probabilité d'une variable aléatoire X .

Exemple :

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \frac{3}{x^4} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

Montrer que f est une densité de probabilité.

Propriété : TRES IMPORTANT

Soit X une variable aléatoire de densité de probabilité f_X .

Alors $\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt$.

Exemple : Suite de l'exemple précédent :

Soit X une V.A.R. qui admet f comme densité de probabilité. Déterminer la fonction de répartition de X .

Remarque : Quand on trouve F_X , on vérifie toujours dans sa tête que :

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1 \\ F_X \text{ continue sur } \mathbb{R} \end{cases}$$

(car toute fonction de répartition a pour limite 0 en $-\infty$ et 1 en $+\infty$, et que toute fonction de répartition d'une variable à densité est continue sur $\mathbb{R}$)

Vérification dans l'exemple précédent :

Propriété (Régularité de la fonction de répartition)

Si f_X est une densité de probabilité d'une variable aléatoire X , alors :

1) F_X est continue sur $\mathbb{R}$

2) F_X est de classe C^1 sur tout intervalle sur lequel f_X est continue, et sur chaque intervalle, $F_X'(x) = f_X(x)$.

Ex : Vérification sur l'exemple précédent : $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \frac{3}{x^4} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ (continue sur $]-\infty; 1[$ et $]1; +\infty[$)

On a trouvé : $F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 - \frac{1}{x^3} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

1.3 Probabilité d'être dans un intervalle

Propriété :

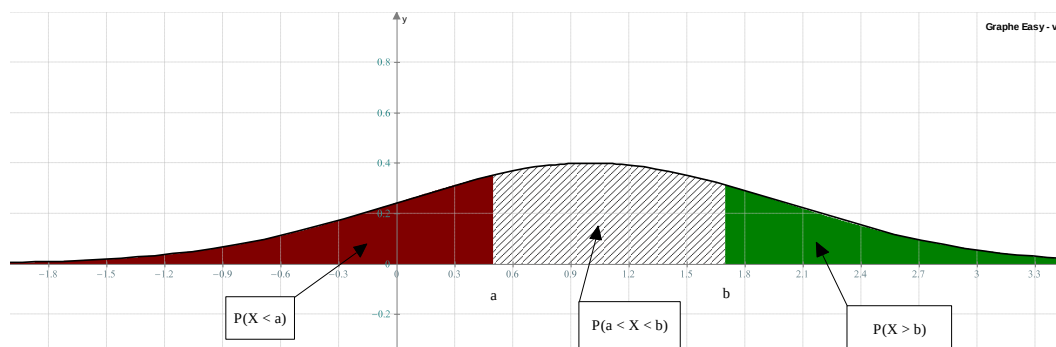
Soit X une V.A.R. qui admet une densité de probabilité f_X .Alors $\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}$ avec $a \leq b$,

1) $P(X = a) = 0$

2) $P(X < a) = P(X \leq a) = F_X(a) = \int_{-\infty}^a f_X(t) dt$

3) $P(X \geq a) = P(X > a) = 1 - F_X(a) = \int_a^{+\infty} f_X(t) dt.$

4) $P(a \leq X \leq b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X < b) = F_X(b) - F_X(a) = \int_a^b f_X(x) dx$



Remarques :

_ donc, si I est un intervalle, alors $P(X \in I) = \int_I f_X(x) dx$ _ si sur un intervalle I , $f_X(x) = 0$, alors $P(X \in I) = \int_I 0 dx = 0$._ inversement, si $f_X(x) = 0 \forall x \in \mathbb{R} \setminus I$, (f est à support sur I) alors $P(X \in I) = 1$,Dans ce cas, on dit que X est à valeurs dans I .**A retenir :****Si f_X est une densité de X , X prend ses valeurs sur les intervalles sur lesquels f_X est non nulle.**

Propriété :

Soit X une variable aléatoire de densité f_X .On suppose que f_X est nulle en dehors d'un intervalle $]a;b[$, (ou $[a;b]$, $[a;b[$, $]a;b]$), $-\infty \leq a < b \leq +\infty$.

Alors :
$$\begin{cases} \forall x < a, F_X(x) = 0 \\ \forall x > b, F_X(x) = 1 \end{cases}$$

Si f_X est nulle en dehors de I , $F_X(x) = 0$ "avant I " et $F_X(x) = 1$ "après I "

Exemple :

On a vu dans l'exercice 2 feuille 1 que $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2x & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ est une densité de probabilité.Soit X une VAR de densité f . Déterminer $F_X(x)$ pour $x < 0$ et $x > 1$.

2. Espérance et variance d'une variable aléatoire à densité

2.1 Espérance

Définition :

Soit X une V.A.R. de densité f_X .

Si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx$ est absolument convergente, on dit que X admet une espérance.

Dans ce cas, l'espérance de X est définie par : $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx$.

Ex : Soit X une variable aléatoire de densité $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \frac{3}{x^4} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$. Montrer que X admet une espérance et déterminer $E(X)$.

Remarques :

_ $E(X)$ représente la "valeur moyenne" de X . Attention à la cohérence !

_ si f_X est paire alors $x \mapsto x f_X(x)$ est impaire.

Dans cas si l'intégrale $\int_0^{+\infty} x f_X(x) dx$ converge, alors X admet une espérance et $E(X) = 0$.

Rappel :

Soit X une variable aléatoire discrète et g une fonction définie sur $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$.

Si $\sum_{i \in I} g(x_i) P(X = x_i)$ est finie ou converge absolument, alors $Y = g(X)$ admet une espérance et

$$E(Y) = E(g(X)) = \sum_{i \in I} g(x_i) P(X = x_i)$$

Théorème de transfert :

Soit X une V.A.R. qui admet une densité f_X nulle en dehors d'un intervalle $]a; b[$ (avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$) et soit g une fonction continue sur $]a; b[$ sauf en un nombre fini de points. La variable aléatoire $Y = g(X)$ admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\int_a^b g(x) f_X(x) dx$ est absolument convergente.

Dans ce cas, $E(Y) = E(g(X)) = \int_a^b g(x) f_X(x) dx$.

Remarque :

En particulier, la fonction $g(x) = x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Donc, d'après le théorème de transfert, X^2 admet une espérance si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x) dx$ converge absolument.

Dans ce cas, $E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x) dx$.

Ex : suite de l'ex. précédent : X admet pour densité : $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \frac{3}{x^4} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

X^2 et X^3 admettent-elles une espérance ? Si oui, les déterminer.

Propriété : (Linéarité de l'espérance)

Soit X une V.A.R. à densité et a, b deux réels.

Si X admet une espérance, alors $aX + b$ aussi et $\mathbf{E(aX + b) = aE(X) + b}$.

2.2 Variance

Définition :

Soit X une V.A.R. à densité qui admet une espérance $E(X)$.
 Si $(X - E(X))^2$ admet une espérance, alors on dit que X admet une variance.
 La variance de X est alors : $V(X) = E((X - E(X))^2)$
 L'écart-type de X est alors : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Propriété (Formule de König-Huygens)

Soit X une V.A.R. à densité qui admet une espérance $E(X)$. Alors $V(X)$ existe si et seulement si $E(X^2)$ existe. Dans ce cas, $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$.

Ex : suite de l'ex précédent. Montrer que X admet une variance et déterminer $V(X)$.

Propriété :

Soit X une V.A.R. à densité et a, b deux réels.
 Si X admet une variance, alors $aX + b$ admet une variance et :
 $V(aX + b) = a^2 V(X)$ $\sigma(aX + b) = |a| \sigma(X)$.

Définition : Soit X une V.A.R. à densité.

Si X admet une espérance et si $E(X) = 0$, on dit que X est **centrée**.
 Si X admet un écart-type et si $\sigma(X) = 1$, on dit que X est **réduite**.

Propriété :

Si X une V.A.R. à densité, d'espérance m et d'écart-type non nul s , alors $X^* = \frac{X - m}{s}$ est une variable aléatoire centrée réduite.

Démonstration :

3. Fonctions d'une V.A.R. à densité

3.1 Principe général

Rappel :

Soit X une V.A.R. de fonction de répartition F_X .

Si : $\begin{cases} F_X \text{ est continue sur } \mathbb{R} \\ F_X \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ sauf en un nombre fini de points} \end{cases}$

alors X est une V.A.R. à densité.

Dans ce cas, toute fonction f_X définie sur $\mathbb{R}$, positive sur $\mathbb{R}$, et égale à F_X' sur $\mathbb{R}$ sauf en un nombre fini de points est appelé **densité de X** .

Méthode :

Soit X une V.A.R. à densité, de densité f .

Soit g une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On pose $Y = g(X)$. On cherche la **loi de Y** .

Pour cela :

1) on cherche la fonction de répartition de Y :

_ pour $y \in \mathbb{R}$, on cherche $P(Y \leq y) = P(g(X) \leq y)$

_ on résout l'inéquation $g(X) \leq y$ (**attention aux différents cas**).

_ on obtient $P(X \leq i(y)) = F_X(i(y))$ ou $P(X \geq h(y)) = 1 - F_X(h(y))$ ou $P(h(y) \leq X \leq i(y)) = F_X(i(y)) - F_X(h(y))$

_ on termine à l'aide de la fonction de répartition de X . (**attention aux différents cas**)

2) _ soit on reconnaît une loi usuelle (la loi d'une variable aléatoire est entièrement déterminée par sa fonction de répartition)

_ soit : si F_Y est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sauf en un nombre fini de points, Y est une VAR à densité, et on trouve sa densité.

3.2 $Y = aX + b$

Soit X une variable à densité. Soit $a \neq 0$ et $b \in \mathbb{R}$. On pose $Y = aX + b$.
On cherche la loi de Y .

Méthode :

Soit $y \in \mathbb{R}$. $F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(aX + b \leq y) = P(aX \leq y - b)$

$$\begin{aligned} \text{si } a > 0 : P(Y \leq y) &= P\left(X \leq \frac{y-b}{a}\right) & \text{si } a < 0 : P(Y \leq y) &= P\left(X \geq \frac{y-b}{a}\right) \\ &= F_X\left(\frac{y-b}{a}\right) & &= 1 - F_X\left(\frac{y-b}{a}\right) \end{aligned}$$

Il faut ensuite regarder où se situe $\frac{y-b}{a}$.

Ex : Soit X la VAR aléatoire du 1^{er} exemple : $F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 - \frac{1}{x^3} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

Posons $Y = -3X + 1$. Montrer que Y est une variable à densité et déterminer une densité de Y .

Remarque :

X est à valeurs dans $[1; +\infty[$ (car sa densité est nulle sur $]-\infty; 1[$).

$X \geq 1$ donc $-3X \leq -3$ $-3X + 1 \leq -2$ $Y \leq -2$.

Donc $F_Y(y) = 1$ si $y > -2$

3.3 $Y = X^2$

Rappel :

Soit $a \in \mathbb{R}$. $\begin{cases} \text{Si } a < 0 \text{ l'équation } x^2 \leq a \text{ n'a pas de solutions} \\ \text{si } a \geq 0 : x^2 \leq a \Leftrightarrow -\sqrt{a} \leq x \leq \sqrt{a} \end{cases}$

Soit X une V.A.R. à densité. On pose $Y = X^2$. Loi de Y ?

$\forall y \in \mathbb{R}, P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y)$

– si $y < 0, P(X^2 \leq y) = 0$

– si $y \geq 0, P(X^2 \leq y) = P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) = P(X \leq \sqrt{y}) - P(X \leq -\sqrt{y}) = F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y})$

Exemple : Avec l'exemple précédent :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 - \frac{1}{x^3} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Posons $Y = X^2$. Déterminer la fonction de répartition de Y .

Remarque : $X \geq 1$ donc $X^2 \geq 1$ $Y \geq 1$ donc $F_Y(y) = 0$ si $y < 1$.

3.4 $Y = \exp(X), Y = |X|$

Rappels :

Soit $a \in \mathbb{R}$.

– l'inéquation $e^x \leq a$ $\begin{cases} \text{n'a pas de solutions si } a \leq 0 \\ \Leftrightarrow x \leq \ln(a) \text{ si } a > 0 \end{cases}$

– l'inéquation $|x| \leq a$ $\begin{cases} \text{n'a pas de solution si } a < 0 \\ \Leftrightarrow -a \leq x \leq a \text{ si } a \geq 0 \end{cases}$

3.5 Min, max de deux VAR à densité

Définition

Soit X_1, X_2 deux variables aléatoires.

Si pour tout intervalle réel I et J , $P((X_1 \in I) \cap (X_2 \in J)) = P(X_1 \in I)P(X_2 \in J)$, on dit que X_1 et X_2 sont indépendantes.

Dans ce cas, on a en particulier : $\forall x \in \mathbb{R}, P((X_1 \leq x) \cap (X_2 \leq x)) = P(X_1 \leq x)P(X_2 \leq x)$.

$$P((X_1 > x) \cap (X_2 > x)) = P(X_1 > x)P(X_2 > x).$$

Principe :

Soit X_1, X_2 deux VAR à densité.

_ si on pose $Y = \max(X_1, X_2)$, alors

$$\forall t \in \mathbb{R}, (Y \leq t) = \text{"les deux sont } \leq t" = (X_1 \leq t) \cap (X_2 \leq t)$$

_ si on pose $Z = \min(X_1, X_2)$ alors

$$\forall t \in \mathbb{R}, (Z > t) = \text{"les deux sont } > t" = (X_1 > t) \cap (X_2 > t)$$

Exemple :

Soit X_1 et X_2 deux VAR indépendantes, qui suivent la même loi de densité :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \frac{3}{x^4} & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \quad (\text{donc } F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 - \frac{1}{x^3} & \text{si } x \geq 1 \end{cases})$$

a) On pose $Y = \max(X_1, X_2)$. Déterminer F_Y . Y est-elle une variable à densité ?

b) On pose $Z = \min(X_1, X_2)$. Déterminer F_Z .