Chapitre 16 : Equations différentielles

1. Equations différentielles linéaires d'ordre 1

Rappel :

Soit I un intervalle, a un réel et $t \longmapsto b(t)$ une fonction continue sur I.
On appelle équation différentielle linéaire d'ordre 1 (à coefficients constants) une équation du type :

$y' + a.y = b(t)$.

Une solution de cette équation est une fonction f **définie et dérivable sur I** et telle que :

$\forall t \in I, f'(t) + a.f(t) = b(t)$

On appelle équation différentielle homogène associée l'équation différentielle : (E_H) : **$y' + ay = 0$**.

Exemple :
Soit l'équation différentielle (E) : $y' + 2y = t^2$ (sur $\mathbb{R}$)
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}$
Montrer que f est une solution de l'équation différentielle (E)

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall t \in \mathbb{R}$, $f'(t) = t - \frac{1}{2}$.

Donc $\forall t \in \mathbb{R}$, $f'(t) + 2f(t) = t - \frac{1}{2} + t^2 - t + \frac{1}{2} = t^2$ donc f est solution de (E).

Remarque :
Si b est une fonction continue sur un intervalle I, les solutions de l'équation différentielle $y' = b(t)$ sont les primitives de b sur I.

1.1 Résolution de l'équation homogène

Propriété : **Solutions de l'équation homogène**

Soit I un intervalle et a un réel.
Les solutions de l'équation différentielle (E_H) **$y' + ay = 0$** sont les fonctions du type :

$f(t) = \lambda e^{-at}$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exemple : Soit (E_H) l'équation différentielle : $y' + 2y = 0$ (sur $\mathbb{R}$)
Déterminer les solutions de (E_H).

Les solutions sont les fonctions $f(t) = \lambda.e^{-2t}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

1.2 Solutions particulières

Propriété : Solution particulière quand le **second membre est une constante**

Soit I un intervalle, a un réel non nul, et **b un réel**
On considère l'équation différentielle (E) : $y' + ay = b$
Alors il existe une **fonction constante qui est solution de (E)**.

Remarque :

Plus précisément la fonction définie par : $\forall\, t \in I,\ f(t) = \dfrac{b}{a}$, est une solution particulière de l'équation (E).

(si y est constante alors $y' = 0$ donc $a.y = b \quad y = b/a$.)

Exemple :
On considère l'équation différentielle : $y' + 2y = 1$.
Déterminer une solution particulière.

On sait qu'il existe une solution particulière constante, donc telle que $y' = 0$.

Donc $2y = 1 \quad y = \dfrac{1}{2}$.

Remarques :
_ de manière générale, si **b est une fonction polynomiale**, et si $\mathbf{a \neq 0}$, on peut montrer qu'il existe une solution particulière qui est une **fonction polynomiale de même degré que b**. (mais ce n'est pas vraiment au programme)
_ de même, si b est de la forme $\mathbf{b(t) = e^{mt}P(t)}$, avec $m \in \mathbb{R}$ et **P un polynôme**, on peut montrer qu'il existe une solution de la forme $\mathbf{y_0(t) = e^{mt}Q(t)}$, où **Q est un polynôme**, avec $\deg(Q) = \begin{cases} \deg(P) \text{ si } m \neq -a \\ \deg(P) + 1 \text{ si } m = -a \end{cases}$

(On augmente d'un degré si $b(t) = e^{-at}P(t)$ (comme la solution de l'équation homogène))

Exemples :

_ On a vu que l'équation différentielle $y' + 2y = t^2$ a pour solution particulière $y(t) = \dfrac{1}{2}t^2 - \dfrac{1}{2}t + \dfrac{1}{4}$.

_ Soit l'équation différentielle : $y' + 2y = (t + 1)e^t$.
Déterminer une solution particulière.

$e^t = e^{1t} \quad 1 \neq -2$, donc on cherche y_0 de la forme $y_0(t) = Q(t)e^t$, avec $\deg(Q) = 1$. Posons $Q(t) = a.t + b$
$y_0'(t) = Q'(t)e^t + Q(t)e^t = (Q'(t) + Q(t))e^t = (a + at + b)e^t$
$y_0'(t) + 2y_0(t) = (a + at + b)e^t + 2(at + b)e^t = (3at + a + 3b)e^t$.

$$y_0'(t) + 2y_0(t) = (t + 1)e^t \Leftrightarrow \begin{cases} 3a = 1 \\ a + 3b = 1 \end{cases} \text{ par identification} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{3} \\ b = \dfrac{2}{9} \end{cases}$$

Donc $y_0(t) = \left(\dfrac{1}{3}t + \dfrac{2}{9}\right)e^t$ est une solution particulière.

1.3 Solutions de l'équation générale

Propriété : **Solutions de l'équation générale**

Soit I un intervalle, a un réel et b une fonction continue sur I.
On considère l'équation différentielle (E) : $y' + ay = b(t)$
On suppose que f_p est une solution de (E) (appelée solution particulière)
Alors l'ensemble des solutions de (E) sont les fonctions $f_p + \lambda e^{-at}$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Autrement dit, **l'ensemble des solutions est formé de la somme d'une solution particulière et des solutions de l'équation homogène**.

Exemple : Soit (E) l'équation différentielle : $y' + 2y = t^2$ (sur $\mathbb{R}$)
Déterminer l'ensemble des solutions de (E)

On a vu qu'une solution particulière est $f(t) = \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}$

On a vu que les solutions de l'équation homogène $y' + 2y = 0$ sont les fonctions $g(t) = \lambda e^{-2t}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Les solutions de l'équation (E) sont donc les fonctions $\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{4} + \lambda e^{-2t}$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Propriété : Principe de superposition des solutions

Soit I un intervalle, a, λ_1, λ_2 des réels, et b_1 et b_2 deux fonctions continues sur I.
On suppose que f_1 est une solution particulière de l'équation (E_1) : $y' + ay = b_1(t)$
f_2 est une solution particulière de l'équation (E_2) : $y' + ay = b_2(t)$
Alors $\boldsymbol{\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2}$ est une solution de l'équation (E) : $\boldsymbol{y' + ay = \lambda_1.b_1(t) + \lambda_2.b_2(t)}$
Donc l'ensemble des solutions de l'équation (E) est : $\{ \lambda_1.f_1(t) + \lambda_2.f_2(t) + \lambda e^{-at}, \lambda \in \mathbb{R} \}$

Exemple :
Déterminer les solutions de l'équation différentielle : $y' + 2y = 2t^2 - 3$

_ $f_1(t) = \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}$ est une solution de $y' + 2y = t^2$

_ $f_2(t) = \frac{1}{2}$ est une solution de : $y' + 2y = 1$

Donc par superposition des solutions : $2f_1(t) - 3f_2(t) = t^2 - t + \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = t^2 - t - 1$ est solution de l'équation $y' + 2y = 2t^2 - 3$
Donc les solutions sont les fonctions $f(t) = \lambda e^{-2t} + t^2 - t - 1$.

1.4 Problème de Cauchy et trajectoires

Propriété : **Problème de Cauchy**

Soit (E) l'équation différentielle : $y' + ay = b$, avec b fonction continue sur l'intervalle I.
Soit $t_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$.
Alors **il existe une unique solution f de (E) qui vérifie : $f(t_0) = y_0$.**

Exemple :
On a vu que les solutions de l'équation (E) : : $y' + 2y = 2t^2 - 3$ (sur $\mathbb{R}$) sont les fonctions de la forme $f(t) = t^2 - t - 1 + \lambda e^{-2t}$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
Déterminer la solution de (E) qui vérifie $f(0) = 1$.

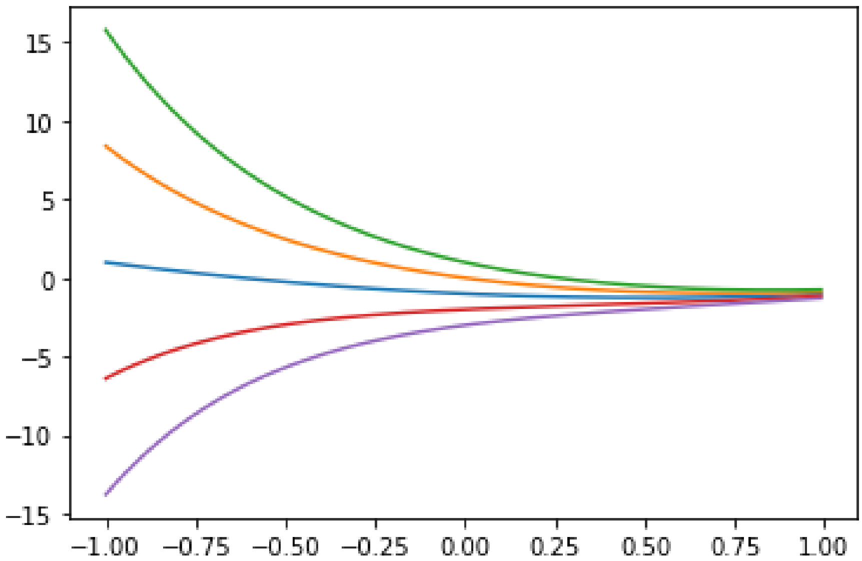
$f(0) = 1 \Leftrightarrow -1 + \lambda e^0 = 1 \Leftrightarrow \lambda = 2$ donc la solution est : $f(t) = \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t - \frac{1}{4} + 2e^{-2t}$

Définition :

Soit (E) une équation différentielle.
On appelle **trajectoire** de (E) tout ensemble $\{(t, f(t);\ t \in I\}$, où f est une solution de I.

Remarques :
Les trajectoires peuvent se représenter par des courbes dans le plan.
La propriété du problème de Cauchy signifie qu'**une et une seule trajectoire passe par un point donné.**
Elle est entièrement déterminée par ce point. Autrement dit, les trajectoires n'ont pas de points d'intersection.

Ex : Exemples de trajectoires pour l'exemple précédent



Définition

Soit (E) une équation différentielle.
On appelle **trajectoire d'équilibre** toute trajectoire associée à une **solution constante** de (E).

Ex :
Soit (E) l'équation différentielle : $y' + y = 2$
On peut montrer que les solutions de (E) sont les fonctions $y(t) = \lambda e^{-t} + 2$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
Est-ce que (E) admet une trajectoire d'équilibre ?

La fonction constante $y(t) = 2$ est donc une solution de (E).
La trajectoire $\{ (t, 2), t \in \mathbb{R} \}$ est donc une trajectoire d'équilibre.

Définition

Soit (E) une équation différentielle sur un intervalle I de borne $+\infty$.
Soit y une solution de (E). Si **y(t) admet une limite finie quand t tend vers + ∞**, on dit que la **trajectoire** associée est **convergente**.

Exemple :
Dans l'exemple précédent, si y est une solution, $y(t) = \lambda e^{-t} + 2$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
Quelles sont les trajectoires convergentes ?

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{t \to +\infty} y(t) = 2$. Toutes les trajectoires sont convergentes.

1.5 Résolutions avec Python

On utilisera la fonction **odeint** dans la bibliothèque **scipy.integrate** de la manière suivante :

```
from scipy.integrate import odeint
```

Considérons une équation différentielle de la forme : y' = f(y, t).

On suppose définis :

_ la fonction f :
```
def f(y, t) :
        ...
    return ...
```
_ un réel y_0 : `y0 = ...`

_ une liste de valeurs t =$(t_0, \dots, t_n)$: `t = np.arange(a, b, h)`

Alors :

sol=odeint(f, y0, t)

renvoie le vecteur sol = $(y(t_0), \dots, y(t_n))$ tel que : $\begin{cases} y \text{ est solution de l'équation différentielle } y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$

Dans ce cas, plt.plot(t,sol) représente le graphe de la solution.

Exemple :

On considère l'équation différentielle : $y' + 2y = 2t^2 - 3$

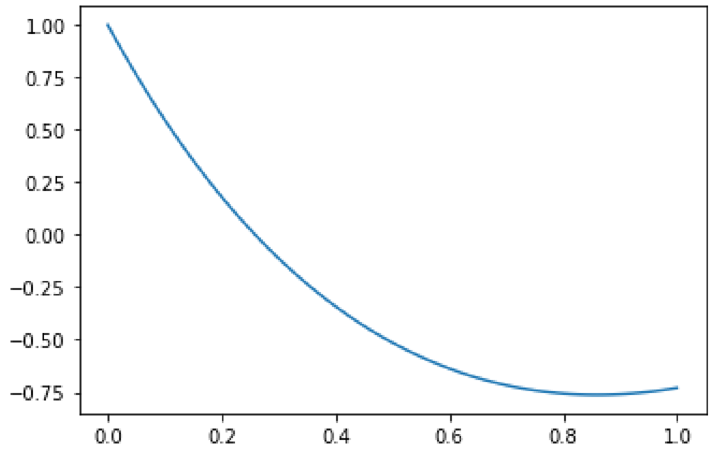
Soit y la solution telle que y(0) = 1.

Représenter la solution y sur [0;1] (avec un pas de 0,01)

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import odeint

def f(y,t):
   return -2*y+2*t**2-3

t=np.arange(0,1.01,0.01)
sol=odeint(f,1,t)
plt.plot(t,sol)
plt.show()import numpy as np
```



2. Equations différentielles linéaires d'ordre 2

Définition

Soit I un intervalle, a et b deux réels et $t \longmapsto c(t)$ une fonction continue sur I.
On appelle équation différentielle linéaire d'ordre 2 (à coefficients constants) une équation du type :

$$\mathbf{y'' + a.y' + b.y = c(t)}$$

On appelle solution de cette équation différentielle toute fonction f deux fois dérivable sur I et telle que :
$\forall t \in I$, $f''(t) + af'(t) + bf(t) = c(t)$

Ex : Soit l'équation différentielle (E) : $y'' - y = e^t$ (sur $\mathbb{R}$)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(t) = \frac{1}{2} t.e^t$

Montrer que f est une solution de (E).

f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et $\forall t \in \mathbb{R}$, $f'(t) = \frac{1}{2} e^t + \frac{1}{2} t.e^t$ $\quad$ $f''(t) = \frac{1}{2} e^t + \frac{1}{2} e^t + \frac{1}{2} t.e^t = e^t + \frac{1}{2} t.e^t$

$f''(t) - f(t) = e^t$ donc f est solution de (E).

Remarque :
De manière analogue au paragraphe précédent, on appelle **équation homogène** associée l'équation :

$$\mathbf{y'' + a.y' + b.y = 0}$$

Définition – Propriété : **Solutions de l'équation homogène**

Soit a et b deux réels. Soit (E) l'équation différentielle homogène : $y'' + ay' + by = 0$
On appelle **équation caractéristique** l'équation du second degré : $\mathbf{r^2 + ar + b = 0}$
Soit Δ le discriminant de cette équation
_ si $\mathbf{\Delta > 0}$: notons r_1 et r_2 les racines de l'équation
Les solutions de l'équation différentielle sont alors les fonctions :

$$\mathbf{f(t) = \lambda.\exp(r_1 t) + \mu.\exp(r_2 t), \text{ avec } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2}$$

_ si $\mathbf{\Delta = 0}$: notons r_0 la racine double de l'équation
Les solutions de l'équation différentielle sont alors les fonctions :

$$\mathbf{f(t) = (\lambda.t + \mu)\exp(r_0 t) \text{ avec } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2}$$

Remarques :
_ Si $\Delta < 0$, des formules existent aussi, mais elles ne sont pas au programme
_ on remarquera l'analogie avec les suites récurrentes d'ordre 2
_ de la même manière qu'au paragraphe précédent, on peut montrer que si y_1 et y_2 sont deux solutions de l'équation homogène, et si α et β sont deux réels, alors $\alpha y_1 + \beta y_2$ est aussi solution de l'équation homogène.
_ pour une équation différentielle homogène d'ordre 1 du type $y' + ay = 0$, l'équation caractéristique est $r + a = 0$, qui a pour solution $r = -a$, et les solutions de l'équation homogène sont bien les fonctions de la forme $t \longmapsto \lambda e^{-at}$

Exemples :

1) Soit l'équation différentielle : (E) $y'' - y = 0$

Déterminer les solutions de (E).

Equation caractéristique : $r^2 - 1 = 0$ $\quad (r-1)(r+1) = 0$

2 racines distinctes : 1 et -1

Donc les solutions sont les fonctions : $f(t) = \lambda e^t + \mu e^{-t}$, avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$

2) Soit l'équation différentielle : (E') $y'' - 2y' + y = 0$

Déterminer les solutions de (E')

Equation caractéristique : $r^2 - 2r + 1 = 0$ $\quad (r-1)^2 = 0$

Une racine double : 1

Donc les solutions sont les fonctions : $f(t) = (\lambda t + \mu)e^t$, avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$

Propriété : **Solutions de l'équation générale**

Soit a et b deux réels et c une fonction continue sur un intervalle I.

On considère l'équation différentielle (E) : $y'' + ay' + by = c(t)$.

Notons f_p une solution particulière de (E) et S_H l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée.

Alors les solutions de (E) sont les fonctions f du type : $\mathbf{f = f_p + f_0}$, avec $\mathbf{f_0 \in S_H}$.

Remarque :

Autrement dit, **les solutions sont les fonctions sommes d'une solution particulière et d'une solution de l'équation homogène**.

Exemple :

Soit (E) l'équation différentielle : (E) : $y'' - y = e^t$ (sur $\mathbb{R}$). Déterminer les solutions de (E).

On a vu que :

_ la fonction $f(t) = \frac{1}{2}t.e^t$ est une solution particulière

_ l'équation homogène associée a pour solutions les fonctions : $f(t) = \lambda e^t + \mu e^{-t}$.

Donc les solutions de (E) sont les fonctions de la forme : $f(t) = \frac{1}{2}t.e^t + \lambda e^t + \mu e^{-t}$, avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$

Propriété : Solution particulière quand le **second membre est une constante**

Soit I un intervalle, a et b deux réels. On suppose que b est non nul et que c est un réel.
On considère l'équation différentielle (E) : $y'' + ay' + by = c$
Alors il existe une **fonction constante qui est solution de (E)**.

Remarques :
_ plus précisément, si $b \neq 0$, la fonction définie par : $\forall\ t \in I$, $f(t) = \frac{c}{b}$, est une solution particulière de l'équation (E).
_ de manière générale, si c est une fonction polynomiale, et si $b \neq 0$, on peut montrer qu'il existe une solution particulière qui est une fonction polynomiale de même degré que c. (mais ce n'est pas vraiment au programme)

Exemple : On considère l'équation différentielle (E) : $y'' + 3y' – 2y = 5$.
Déterminer une solution particulière.
Le second membre est une constante. Cherchons une solution constante.
Donc $y' = 0$ $y'' = 0$ $-2y = 5$ $y = -\frac{5}{2}$.

Propriété : Principe de superposition des solutions

Soit I un intervalle, a, b, λ_1, λ_2 des réels, et c_1 et c_2 deux fonctions continues sur I.
On suppose que f_1 est une solution particulière de l'équation (E_1) : $y'' + ay' + by = c_1(t)$
f_2 est une solution particulière de l'équation (E_2) : $y'' + ay' + by = c_2(t)$
Alors $\boldsymbol{\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2}$ est une solution de l'équation (E) : $\boldsymbol{y'' + ay' + by = \lambda_1.c_1(t) + \lambda_2.c_2(t)}$

Propriété : **Problème de Cauchy**

Soit (E) l'équation différentielle : $y'' + ay' + b = c(t)$, avec c fonction continue sur l'intervalle I.
Soit $t_0 \in I$, $y_0 \in \mathbb{R}$ et $z_0 \in \mathbb{R}$.
Alors **il existe une unique solution f de (E) qui vérifie :** $\begin{cases} \mathbf{f(t_0) = y_0} \\ \mathbf{f'(t_0) = z_0} \end{cases}$.

Ex : Soit (E) l'équation différentielle : (E) : $y'' - y = e^t$

Déterminer la solution f de (E) telle que $\begin{cases} f(0) = 1 \\ f'(0) = 1 \end{cases}$

Les solutions de (E) sont les fonctions : $f(t) = \frac{1}{2}t.e^t + \lambda e^t + \mu e^{-t}$ $\forall t \in \mathbb{R}$

Donc $\forall t \in \mathbb{R}$, $f'(t) = \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}t.e^t + \lambda e^t - \mu e^{-t}$

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f'(0) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu = 1 \\ \frac{1}{2} + \lambda - \mu = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu = 1 \\ 2\lambda = \frac{3}{2} \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_1 + L_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = \frac{1}{4} \\ \lambda = \frac{3}{4} \end{cases}$$

Donc la solution est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(t) = \frac{1}{2}t.e^t + \frac{3}{4}e^t + \frac{1}{4}e^{-t}$ $\forall t \in \mathbb{R}$

Remarque :
_ La définition d'une trajectoire reste identique. Mais dans le cas d'une équation différentielle d'ordre 2, il y a donc plusieurs trajectoires qui passent par un même point.

Exemple:
Dans la situation précédente, exemples de trajectoires avec f(0) = 1 :