Chapitre 16 : Equations différentielles – Correction niveau 2

Exercice 1

1) a) y est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables et $\forall t \in \mathbb{R}$,

$y'(t) = -\lambda.A'(t).e^{-A(t)} = -\lambda.a(t).\exp(A(t))$ donc $y'(t) + a(t)y(t) = -\lambda.a(t).\exp(A(t)) + \lambda.a(t).\exp(A(t)) = 0$

Donc y est solution de (E_H).

b) z est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables et

$\forall t \in \mathbb{R}$, $z'(t) = y'(t)e^{A(t)} + y(t)A'(t)e^{A(t)} = (y'(t) + y(t)a(t))e^{A(t)} = 0.e^{A(t)} = 0$

Donc z est constante. Donc il existe un réel λ tel que : $\forall t \in \mathbb{R}$, $z(t) = \lambda$. $y(t)e^{A(t)} = \lambda$ $y(t) = \lambda.e^{-A(t)}$

Conclusion : Les solutions de (E_H) sont les fonctions : $t \longmapsto \lambda e^{-A(t)}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

(Le cas où a est une constante est un cas particulier, où A(t) = a.t, évidemment)

2) Comme auparavant, z est dérivable comme produit de fonctions dérivables, et

$\forall t \in \mathbb{R}$, $z'(t) = (y'(t) + y(t)a(t))e^{A(t)} = b(t)e^{A(t)} = c(t)$

Donc il existe un réel λ tel que $\forall t \in \mathbb{R}$, $z(t) = C(t) + \lambda$. et $y(t) = z(t)e^{-A(t)} = C(t)e^{-A(t)} + \lambda e^{-A(t).}$

Inversement, s'il existe un réel λ tel que $y(t) = C(t)e^{-A(t)} + \lambda e^{-A(t)}$, alors y est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$\forall t \in \mathbb{R}$, $y'(t) = C'(t)e^{-A(t)} - C(t)A'(t)e^{-A(t)} - \lambda A'(t)e^{-A(t)} = b(t)e^{A(t)}e^{-A(t)} - C(t)a(t)e^{-A(t)} - \lambda a(t)e^{-A(t)}$.

$= b(t) - C(t)a(t)e^{-A(t)} - \lambda a(t)e^{-A(t)}$

Donc $y'(t) + a(t)y(t) = b(t) - C(t)a(t)e^{-A(t)} - \lambda a(t)e^{-A(t)} + C(t)e^{-A(t)} + \lambda e^{-A(t)} = b(t)$.

Donc y est solution de (E).

Donc les solutions de (E) sont les fonctions : $t \longmapsto C(t)e^{-A(t)} + \lambda e^{-A(t)}$, où $\lambda \in \mathbb{R}$.

3) On applique le résultat précédent avec $a(t) = t$ et $b(t) = t.\exp(-t^2)$

Une primitive de a est : $A(t) = \dfrac{t^2}{2}$

Donc les solutions de l'équation homogène sont les fonctions : $t \longmapsto \exp\left(-\dfrac{t^2}{2}\right)$

$c(t) = b(t)e^{A(t)} = t.\exp(-t^2)\exp\left(\dfrac{t^2}{2}\right) = t.\exp\left(-\dfrac{t^2}{2}\right)$. Donc une primitive de c est : $C(t) = -\exp\left(-\dfrac{t^2}{2}\right)$

Donc les solutions sont les fonctions : $y(t) = -\exp\left(-\dfrac{t^2}{2}\right)\exp\left(-\dfrac{t^2}{2}\right) + \lambda\exp\left(-\dfrac{t^2}{2}\right) = -\exp(-t^2) + \lambda\exp\left(-\dfrac{t^2}{2}\right)$.

Exercice 2

1) a) En dérivant l'égalité matricielle (par rapport à u), on obtient : $\forall t \in \mathbb{R}$, $\forall u \in \mathbb{R}$, $f'(t + u) = f(t).f'(u)$.

Avec $u = 0$: $f'(t) = f(t)f'(0)$.

b) Or $f'(0) = 2$ donc $f'(t) - 2f(t) = 0$.

Donc f est solution de l'équation différentielle $y' - 2y = 0$. ($a = -2$)

Donc il existe un réel λ tel que : $\forall t \in \mathbb{R}$, $f'(t) = \lambda e^{2t}$

c) Donc $\forall t \in \mathbb{R}$, $f'(t) = 2\lambda e^{t}$. $f'(0) = 2$ donc $2\lambda e^0 = 2$ $\lambda = 1$.

4) La fonction trouvée est donc : $\forall t \in \mathbb{R}$, $f(t) = e^{2t}$. f est bien dérivable sur $\mathbb{R}$, $f'(0) = 2$

et $\forall t \in \mathbb{R}$, $\forall u \in \mathbb{R}$, $f(t+u) = e^{2(t+u)} = e^{2t+2u} = e^{2t}.e^{2u} = f(t)f(u)$.