Chapitre 16 : Equations différentielles – Feuille n°1

Exercice 1
1) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle suivante : $y' - 3y = 1$
2) Déterminer la solution vérifiant $y(0) = 2$

Exercice 2
On considère l'équation différentielle (E) : $y' + y = t^2 + 1 - 3t.e^{-t}$
1) Déterminer une fonction polynomiale de degré 2 solution de l'équation différentielle $y' + y = t^2 + 1$.
2) Déterminer deux réels a et b tels que la fonction $y(t) = t(at + b)e^{-t}$ est solution de l'équation différentielle $y' + y = t.e^{-t}$.
3) Déterminer l'ensemble des solutions de (E).

Exercice 3 – Méthode de la variation de la constante
Le but de cet exercice est de résoudre, sur $\mathbb{R}$, l'équation (E) suivante : $y' - 3y = t^2e^{3t}$
1. Donner toutes les solutions de l'équation homogène associée.
2. Soit λ une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
a) Justifier que la fonction $Y_0 : t \longmapsto \lambda(t)e^{3t}$ est solution de (E) sur $\mathbb{R}$ si et seulement si, on a, pour tout réel t, $\lambda'(t) = t^2$.
b) En déduire une solution particulière de (E).
3. Conclure en donnant l'ensemble des solutions de (E).

Exercice 4
Soit α et β deux réels, avec $\alpha \neq 0$. On considère l'équation différentielle (E) : $y' + \alpha y = \beta$.
1) Cette équation différentielle admet-elle une trajectoire d'équilibre ? Si oui, la préciser.
2) Exprimer les solutions de (E) en fonction de α et β.
3) a) Si $\alpha > 0$, quelles sont les trajectoires convergentes ?
b) Si $\alpha < 0$, quelles sont les trajectoires convergentes ?

Exercice 5 – Exemple d'équation différentielle non linéaire : Equation logistique
Soit a et b deux réels strictement positifs.
On considère l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$: $y'(t) = a.y(t).(1 - b.y(t))$ que l'on note (E).
1. Déterminer les deux trajectoires d'équilibre de cette équation différentielle.
On admet dans la suite que les trajectoires non nulles de (E) ne s'annulent jamais sur $\mathbb{R}$.
2. On suppose dans cette question, que y est une solution non nulle de (E) sur $\mathbb{R}$.
a) Après avoir vérifié que la fonction $z : t \longmapsto \dfrac{1}{y(t)}$ est bien dérivable sur $\mathbb{R}$, montrer qu'il existe deux réels c et d que l'on déterminera tels que : $z'(t) = c.z(t) + d$.
b) Résoudre cette équation différentielle.
c) En déduire l'expression de y(t) en fonction de t.
d) Ces trajectoires convergent-elles ?

Remarque : L'équation logistique modélise l'évolution d'une population en milieu fermé (y étant l'effectif de la population. Le terme a.y(t) représente la croissance naturelle de la population (proportionnelle à son effectif). Le terme – ab.y^2(t) représente la limite de cette accroissement en fonction des ressources disponibles ("concurrence").