Chapitre 16 : Equations différentielles

1. Equations différentielles linéaires d'ordre 1

Rappel :

Soit I un intervalle, a un réel et $t \longmapsto b(t)$ une fonction continue sur I.
On appelle équation différentielle linéaire d'ordre 1 (à coefficients constants) une équation du type :
$y' + a.y = b(t)$.
Une solution de cette équation est une fonction f **définie et dérivable sur I** et telle que :
$\forall t \in I, f'(t) + a.f(t) = b(t)$
On appelle équation différentielle homogène associée l'équation différentielle : (E_H) : **$y' + ay = 0$**.

Exemple :
Soit l'équation différentielle (E) : $y' + 2y = t^2$ (sur $\mathbb{R}$)
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}$
Montrer que f est une solution de l'équation différentielle (E)

Remarque :
Si b est une fonction continue sur un intervalle I, les solutions de l'équation différentielle $y' = b(t)$ sont les primitives de b sur I.

1.1 Résolution de l'équation homogène

Propriété : **Solutions de l'équation homogène**

Soit I un intervalle et a un réel.
Les solutions de l'équation différentielle (E_H) **$y' + ay = 0$** sont les fonctions du type :
$f(t) = \lambda e^{-at}$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Esquisse de démonstration : Absolument pas rigoureuse, mais juste pour comprendre :
Si $y > 0$ $\quad y' + ay = 0 \Leftrightarrow y' = -ay \Leftrightarrow \frac{y'}{y} = -a$
donc $\ln(y) = -at + b$, $b \in \mathbb{R}$ $\quad y = e^{-at+b} = e^b e^{-at} = \lambda e^{-at}$ avec $\lambda = e^b$

Exemple : Soit (E_H) l'équation différentielle : $y' + 2y = 0$ (sur $\mathbb{R}$)
Déterminer les solutions de (E_H).

1.2 Solutions particulières

Propriété : Solution particulière quand le **second membre est une constante**

Soit I un intervalle, a un réel non nul, et **b un réel**
On considère l'équation différentielle (E) : $y' + ay = b$
Alors il existe une **fonction constante qui est solution de (E)**.

Remarque :

Plus précisément la fonction définie par : $\forall\, t \in I$, $f(t) = \dfrac{b}{a}$, est une solution particulière de l'équation (E).

(si y est constante alors $y' = 0$ donc $a.y = b$ $y = b/a$.)

Exemple :
On considère l'équation différentielle : $y' + 2y = 1$.
Déterminer une solution particulière.

Remarques :
_ de manière générale, si **b est une fonction polynomiale**, et si $\mathbf{a \neq 0}$, on peut montrer qu'il existe une solution particulière qui est une **fonction polynomiale de même degré que b**. (mais ce n'est pas vraiment au programme)
_ de même, si b est de la forme $\mathbf{b(t) = e^{mt}P(t)}$, avec $m \in \mathbb{R}$ et **P un polynôme**, on peut montrer qu'il existe une solution de la forme $\mathbf{y_0(t) = e^{mt}Q(t)}$, où **Q est un polynôme**, avec $\deg(Q) = \begin{cases} \deg(P) \text{ si } m \neq -a \\ \deg(P) + 1 \text{ si } m = -a \end{cases}$
(On augmente d'un degré si $b(t) = e^{-at}P(t)$ (comme la solution de l'équation homogène))

Exemples :

_ On a vu que l'équation différentielle $y' + 2y = t^2$ a pour solution particulière $y(t) = \dfrac{1}{2}t^2 - \dfrac{1}{2}t + \dfrac{1}{4}$.

_ Soit l'équation différentielle : $y' + 2y = (t + 1)e^t$.
Déterminer une solution particulière.

1.3 Solutions de l'équation générale

Propriété : **Solutions de l'équation générale**

Soit I un intervalle, a un réel et b une fonction continue sur I.
On considère l'équation différentielle (E) : $y' + ay = b(t)$
On suppose que f_p est une solution particulière de (E).
Alors l'ensemble des solutions de (E) sont les fonctions $f_p + \lambda e^{-at}$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Autrement dit, **l'ensemble des solutions est formé de la somme d'une solution particulière et des solutions de l'équation homogène**.

Exemple : Soit (E) l'équation différentielle : $y' + 2y = t^2$ (sur $\mathbb{R}$)
Déterminer l'ensemble des solutions de (E)

Propriété : Principe de superposition des solutions

Soit I un intervalle, a, λ_1, λ_2 des réels, et b_1 et b_2 deux fonctions continues sur I.
On suppose que f_1 est une solution particulière de l'équation (E_1) : $y' + ay = b_1(t)$
f_2 est une solution particulière de l'équation (E_2) : $y' + ay = b_2(t)$
Alors $\boldsymbol{\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2}$ est une solution de l'équation (E) : $\boldsymbol{y' + ay = \lambda_1.b_1(t) + \lambda_2.b_2(t)}$
Donc l'ensemble des solutions de l'équation (E) est : $\{ \lambda_1.f_1(t) + \lambda_2.f_2(t) + \lambda e^{-at}, \lambda \in \mathbb{R} \}$

Exemple :
Déterminer les solutions de l'équation différentielle : $y' + 2y = 2t^2 - 3$

1.4 Problème de Cauchy et trajectoires

Propriété : **Problème de Cauchy**

Soit (E) l'équation différentielle : $y' + ay = b$, avec b fonction continue sur l'intervalle I.
Soit $t_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$.
Alors **il existe une unique solution f de (E) qui vérifie : $f(t_0) = y_0$.**

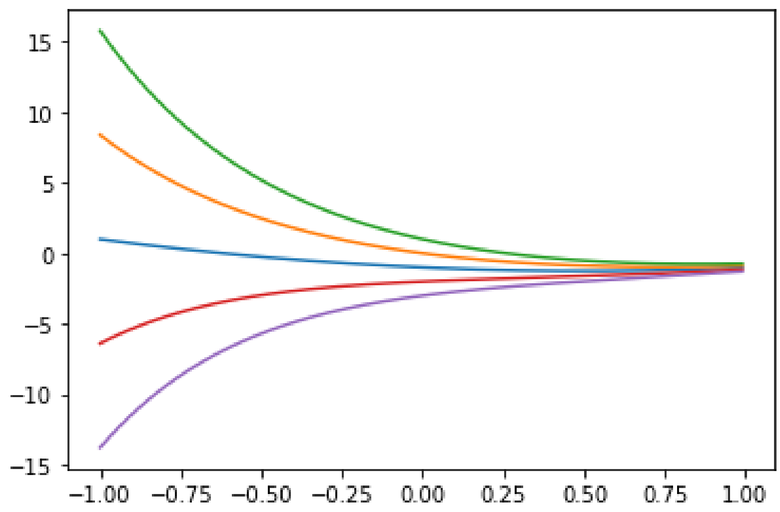
Exemple :
On a vu que les solutions de l'équation (E) : : $y' + 2y = 2t^2 - 3$ (sur $\mathbb{R}$) sont les fonctions de la forme
$f(t) = t^2 - t - 1 + \lambda e^{-2t}$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
Déterminer la solution de (E) qui vérifie $f(0) = 1$.

Définition :

Soit (E) une équation différentielle.
On appelle **trajectoire** de (E) tout ensemble **$\{(t, f(t); t \in I\}$**, où f est une solution de I.

Remarques :
Les trajectoires peuvent se représenter par des courbes dans le plan.
La propriété du problème de Cauchy signifie qu'**une et une seule trajectoire passe par un point donné.**
Elle est entièrement déterminée par ce point. Autrement dit, les trajectoires n'ont pas de points d'intersection.

Ex : Exemples de trajectoires pour l'exemple précédent



Définition

> Soit (E) une équation différentielle.
> On appelle **trajectoire d'équilibre** toute trajectoire associée à une **solution constante** de (E).

Ex :

Soit (E) l'équation différentielle : $y' + y = 2$

On peut montrer que les solutions de (E) sont les fonctions $y(t) = \lambda e^{-t} + 2$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Est-ce que (E) admet une trajectoire d'équilibre ?

Définition

> Soit (E) une équation différentielle sur un intervalle I de borne $+\infty$.
> Soit y une solution de (E). Si **y(t) admet une limite finie quand t tend vers $+\infty$**, on dit que la **trajectoire** associée est **convergente**.

Exemple :

Dans l'exemple précédent, si y est une solution, $y(t) = \lambda e^{-t} + 2$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Quelles sont les trajectoires convergentes ?

1.5 Résolutions avec Python

On utilisera la fonction **odeint** dans la bibliothèque **scipy.integrate** de la manière suivante :

```
from scipy.integrate import odeint
```

Considérons une équation différentielle de la forme : y' = f(y, t).

On suppose définis :

_ la fonction f :
```
def f(y, t) :
        ...
return ...
```
_ un réel y_0 : `y0 = ...`

_ une liste de valeurs t =(t_0, …, t_n) : `t = np.arange(a, b, h)`

Alors :

```
sol=odeint(f, y0, t)
```

renvoie le vecteur sol = ($y(t_0)$, …, $y(t_n)$) tel que : $\begin{cases} y \text{ est solution de l'équation différentielle } y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$

Dans ce cas, plt.plot(t,sol) représente le graphe de la solution.

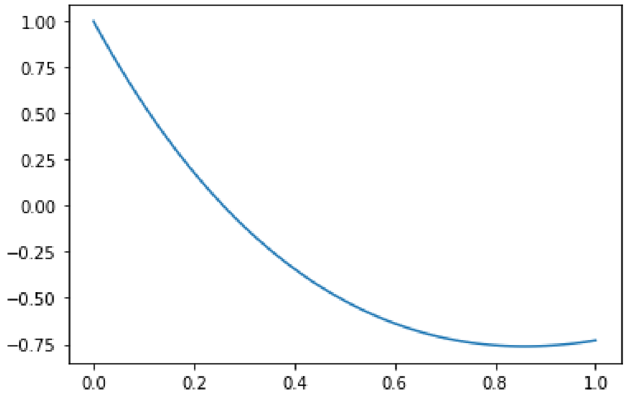
Exemple :

On considère l'équation différentielle : $y' + 2y = 2t^2 - 3$

Soit y la solution telle que y(0) = 1.

Représenter la solution y sur [0;1] (avec un pas de 0,01)

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import odeint
```



2. Equations différentielles linéaires d'ordre 2

Définition

Soit I un intervalle, a et b deux réels et $t \longmapsto c(t)$ une fonction continue sur I.
On appelle équation différentielle linéaire d'ordre 2 (à coefficients constants) une équation du type :

$y'' + a.y' + b.y = c(t)$

On appelle solution de cette équation différentielle toute fonction f deux fois dérivable sur I et telle que :
$\forall\, t \in I,\ f''(t) + af'(t) + bf(t) = c(t)$

Ex : Soit l'équation différentielle (E) : $y'' - y = e^t$ (sur $\mathbb{R}$)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(t) = \frac{1}{2}\,t.e^t$

Montrer que f est une solution de (E).

Remarque :
De manière analogue au paragraphe précédent, on appelle **équation homogène** associée l'équation :

$y'' + a.y' + b.y = 0$

Définition – Propriété : **Solutions de l'équation homogène**

Soit a et b deux réels. Soit (E) l'équation différentielle homogène : $y'' + ay' + by = 0$
On appelle **équation caractéristique** l'équation du second degré : **$r^2 + ar + b = 0$**
Soit Δ le discriminant de cette équation
_ si **$\Delta > 0$** : notons r_1 et r_2 les racines de l'équation
Les solutions de l'équation différentielle sont alors les fonctions :

$f(t) = \lambda.\exp(r_1t) + \mu.\exp(r_2t)$, avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$

_ si **$\Delta = 0$** : notons r_0 la racine double de l'équation
Les solutions de l'équation différentielle sont alors les fonctions :

$f(t) = (\lambda.t + \mu)\exp(r_0t)$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$

Remarques :
_ Si $\Delta < 0$, des formules existent aussi, mais elles ne sont pas au programme
_ on remarquera l'analogie avec les suites récurrentes d'ordre 2
_ de la même manière qu'au paragraphe précédent, on peut montrer que si y_1 et y_2 sont deux solutions de l'équation homogène, et si α et β sont deux réels, alors $\alpha y_1 + \beta y_2$ est aussi solution de l'équation homogène.
_ pour une équation différentielle homogène d'ordre 1 du type $y' + ay = 0$, l'équation caractéristique est $r + a = 0$, qui a pour solution $r = -a$, et les solutions de l'équation homogène sont bien les fonctions de la forme $t \longmapsto \lambda e^{-at}$

Exemples :

1) Soit l'équation différentielle : (E) $y'' - y = 0$

Déterminer les solutions de (E).

2) Soit l'équation différentielle : (E') $y'' - 2y' + y = 0$

Déterminer les solutions de (E')

Propriété : **Solutions de l'équation générale**

Soit a et b deux réels et c une fonction continue sur un intervalle I.
On considère l'équation différentielle (E) : $y'' + ay' + by = c(t)$.
Notons f_p une solution particulière de (E) et S_H l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée.
Alors les solutions de (E) sont les fonctions f du type : $\mathbf{f = f_p + f_0}$, avec $\mathbf{f_0 \in S_H}$.

Remarque :

Autrement dit, **les solutions sont les fonctions sommes d'une solution particulière et d'une solution de l'équation homogène**.

Exemple :

Soit (E) l'équation différentielle : (E) : $y'' - y = e^t$ (sur $\mathbb{R}$). Déterminer les solutions de (E).

Propriété : Solution particulière quand le **second membre est une constante**

Soit I un intervalle, a et b deux réels. On suppose que b est non nul et que c est un réel.
On considère l'équation différentielle (E) : y'' + ay' + by = c
Alors il existe une **fonction constante qui est solution de (E)**.

Remarques :
_ plus précisément, si $b \neq 0$, la fonction définie par : $\forall\, t \in I,\ f(t) = \frac{c}{b}$, est une solution particulière de l'équation (E).
_ de manière générale, si c est une fonction polynomiale, et si $b \neq 0$, on peut montrer qu'il existe une solution particulière qui est une fonction polynomiale de même degré que c. (mais ce n'est pas vraiment au programme)

Exemple : On considère l'équation différentielle (E) : y'' + 3y' – 2y = 5.
Déterminer une solution particulière.

Propriété : Principe de superposition des solutions

Soit I un intervalle, a, b, λ_1, λ_2 des réels, et c_1 et c_2 deux fonctions continues sur I.
On suppose que f_1 est une solution particulière de l'équation (E_1) : $y'' + ay' + by = c_1(t)$
f_2 est une solution particulière de l'équation (E_2) : $y'' + ay' + by = c_2(t)$
Alors $\boldsymbol{\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2}$ est une solution de l'équation (E) : $\boldsymbol{y'' + ay' + by = \lambda_1.c_1(t) + \lambda_2.c_2(t)}$

Propriété : **Problème de Cauchy**

Soit (E) l'équation différentielle : y'' + ay' + b = c(t), avec c fonction continue sur l'intervalle I.
Soit $t_0 \in I$, $y_0 \in \mathbb{R}$ et $z_0 \in \mathbb{R}$.
Alors **il existe une unique solution f de (E) qui vérifie :** $\begin{cases} \mathbf{f(t_0) = y_0} \\ \mathbf{f\,'(t_0) = z_0} \end{cases}$.

Ex : Soit (E) l'équation différentielle : (E) : $y'' - y = e^t$

Déterminer la solution f de (E) telle que $\begin{cases} f(0) = 1 \\ f'(0) = 1 \end{cases}$

Remarque :

_ La définition d'une trajectoire reste identique. Mais **dans le cas d'une équation différentielle d'ordre 2, il y a plusieurs trajectoires qui passent par un même point**.

Exemple:

Dans la situation précédente, exemples de trajectoires avec $f(0) = 1$: