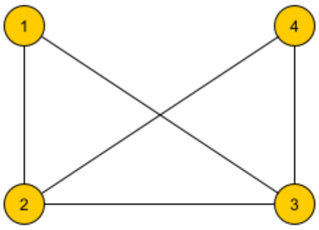
Chapitre 18 – Graphes – Exercices niveau 2

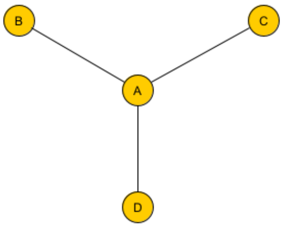
Exercice 1



1. (3, 1, 2,4,3) convient

2. a) Soit $(s_1, \dots, s_n, s_1)$ un cycle hamiltonien.
Soit deux sommets a et b du graphe. Le cycle étant hamiltonien, il passe par tous les sommets, donc il existe i et j tels que $a = s_i$ et $b = s_j$ (supposons que $i < j$). Alors $(s_i, s_{i+1}, \dots, s_j)$ est un chemin de a à b.

b)



Ce graphe est visiblement connexe, et il n'existe aucun cycle hamiltonien.
3. Soit $s_1, \dots, s_n$ les sommets du graphe. Le graphe étant complet, le cycle $(s_1, \dots, s_n, s_1)$ existe. Donc le graphe est hamiltonien.
Remarque $n \geq 3$, donc s_2 et s_n sont distincts.

Exercice 2

1) Chaque sommet es relié à chacun des autres sommets, donc $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \dots & & \dots \\ \dots & & & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2) $A_n^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \dots & & \dots \\ \dots & & & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \dots & & \dots \\ \dots & & & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n-1 & n-2 & \dots & n-2 \\ n-2 & n-1 & & \dots \\ \dots & & \dots & n-2 \\ n-2 & & n-2 & n-1 \end{pmatrix} = (n-2)A_n + (n-1)I_n$

Donc $P(X) = X^2 - (n-2)X - (n-1)$ est un polynôme annulateur.
On voit que -1 est racine évidente donc $P(X) = (X+1)(X-(n-1))$.
Les seules valeurs propres possibles sont -1 et $n-1$.

De plus $A + I_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \dots & & \dots \\ \dots & & & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible ($C_1 = C_2 = \dots$). Donc -1 est valeur propre.

$A - (n-1)I_n = \begin{pmatrix} -(n-1) & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \dots & & \dots \\ \dots & & & 1 \\ 1 & \dots & 1 & -(n-1) \end{pmatrix}$ On voit que $C_1 + \dots + C_n = 0$ donc la matrice n'est pas inversible.

Donc $(n-1)$ est valeur propre. Donc $Sp(A) = \{1, n-1\}$ ($n \geq 3$ donc ces deux valeurs propres sont distinctes).

3) Pour un chemin entre a et b, soit i le nombre de sommets rencontrés (à part a et b). On a : $0 \leq i \leq n-2$
Pour une valeur i fixé :
Pour choisir un chemin, on choisit i sommets distincts et avec ordre parmi les $(n-2)$ restants : il y a $\dfrac{(n-2)!}{(n-2-i)!}$ choix possibles. En tout, il y a donc $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-2} \frac{(n-2)!}{(n-2-i)!}$ chemins possibles.

En posant $k = n-2-i$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-2} \frac{(n-2)!}{k!} = (n-2)! \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{k!}$.