

Exercice 1

Dans cet exercice, on appellera cycle d'un graphe une chaîne dont les sommets sont tous distincts sauf le premier et le dernier élément.

Un graphe est dit hamiltonien s'il existe un cycle contenant tous ses sommets.

On considère dans cet exercice uniquement des graphes non orientés.

1. Soit G un graphe de sommets 1, 2, 3, 4 tel que (1, 2, 3, 4) est une chaîne, et possédant les arêtes $\{1,3\}$ et $\{2,4\}$. Vérifier que G est hamiltonien.
2. a) Montrer qu'un graphe hamiltonien est connexe.
b) Donner un exemple de graphe connexe non hamiltonien.
3. Soit G un graphe à n sommets ($n \geq 3$). Montrer que si G est complet, alors G est hamiltonien.

Exercice 2

Soit G un graphe orienté à n sommets ($n \geq 3$). On dit que G est complet si pour tous sommets distincts a et b , $\{a, b\}$ est une arête de G .

- 1) Soit A_n la matrice d'adjacence de G . Déterminer A_n .
- 2) Déterminer les valeurs propres de A_n .
- 3) Soit a et b deux sommets distincts de G . Montrer que le nombre de chemins reliant a et b et passant par des sommets distincts est égal à : $(n-2)! \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{k!}$