

Chapitre 17 : Graphes

1. Graphe orienté / Graphe non orienté

Définition :

Soit S un ensemble fini.

Soit E un ensemble de parties à deux éléments de S .

$G = (S, E)$ constitue un **graphe non orienté**.

Les éléments de S sont appelés les **sommets** du graphe.

Les éléments de E sont appelés les **arêtes** du graphe.

Une arête s'écrit sous la forme $\{a, b\}$, où a et b sont des sommets du graphe. Une arête est dite adjacente au sommet a si elle contient a .

Remarques :

_ pour un graphe non orienté, l'arête $\{b, a\}$ est la même que l'arête $\{a, b\}$.

_ pour un graphe non orienté, les arêtes sont représentées par des segments entre les sommets.

Définitions :

Soit S un ensemble fini.

Soit E un sous-ensemble de $S \times S$.

$G = (S, E)$ est appelé un **graphe orienté**.

Les éléments de S sont appelés les **sommets** du graphe.

Les éléments de E sont appelés les **arêtes orientées** du graphe.

Une arête s'écrit sous la forme (a, b) , où a et b sont des sommets du graphe. a est alors appelé l'**origine** de l'arête, et b son **extrémité**.

Remarques :

_ Dans un graphe orienté, (a, b) peut être une arête, sans que (b, a) en soit une.

(a, a) peut également être une arête (on l'appelle une boucle)

_ Pour représenter un graphe orienté, on représente les sommets par des points du plan, et les arêtes par des flèches.

Définition :

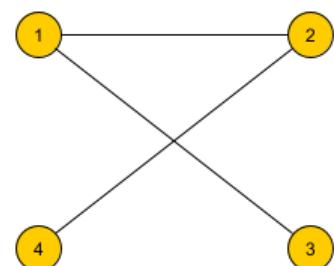
Soit a un sommet d'un graphe G (orienté ou non).

Une **arête** est dite **adjacente** au sommet a si elle a pour origine a .

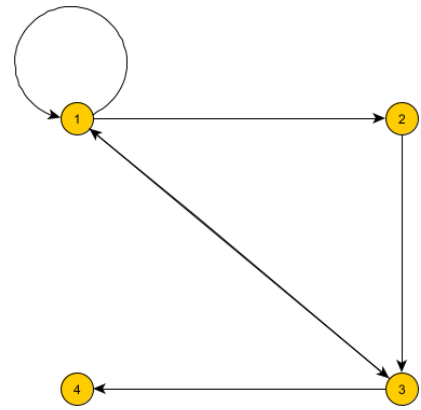
Un **sommet** b est dit **adjacent** au sommet a s'il existe une arête adjacente à a et d'extrémité b .

Exemples :

1) Représenter le graphe non orienté de sommets $\{1, 2, 3, 4\}$ et d'arêtes $\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{2, 4\}$



2) Représenter le graphe orienté de sommets $\{1, 2, 3, 4\}$ et d'arêtes $(1,1), (1,2), (1,3), (2,3), (3,4), (3,1)$



Remarque :

Soit G un graphe (orienté ou non). Si à chaque arête de ce graphe, on attribue un nombre réel positif (appelé poids), on dit que le graphe est **pondéré**.

2. Degré d'un sommet et lemme d'Euler

Définition :

Soit s un sommet d'un graphe (orienté ou non). On appelle **degré de s** le **nombre d'arêtes adjacentes à s** (donc le nombre de sommets adjacents à s)

Remarques :

- _ Si tous les sommets sont adjacents entre eux, on dit que le graphe est **complet**.
- _ pour un graphe orienté, on parle aussi de **degré sortant**.

Exemples :

Dans le premier exemple : $\text{degré}(1) = 2$, $\text{degré}(2) = 2$, $\text{degré}(3) = 1$, $\text{degré}(4) = 1$

Dans le deuxième exemple : $\text{degré}(1) = 3$, $\text{degré}(2) = 1$, $\text{degré}(3) = 2$, $\text{degré}(4) = 0$

Propriété : **Lemme d'Euler**

Dans un graphe non orienté, la **somme des degrés des sommets** est égal au **double du nombre d'arêtes** du graphe.

3. Liste et matrice d'adjacence

Définition :

Soit $G = (S, E)$ un graphe (orienté ou non). Soit a un sommet de G .
On appelle **liste d'adjacence de a** la liste des sommets adjacents à a (= d'origine a)

Remarque :

Le degré d'un sommet est donc le cardinal de sa liste d'adjacence

Exemple :

Suite du deuxième exemple :

Liste d'adjacence de 1 : [1,2,3]

Liste d'adjacence de 2 : [3]

Liste d'adjacence de 3 : [1,4]

Liste d'adjacence de 4 : $\emptyset$

Définition :

Soit $G = (S, E)$ un graphe (orienté ou non). Notons $\{s_1, \dots, s_n\}$ l'ensemble des sommets.
On appelle **matrice d'adjacence de Γ** la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \forall j \in \{1, \dots, n\}, a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } (s_i, s_j) \text{ est une arête (ou } \{s_i, s_j\} \text{ dans le cas non orienté)} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Exemples : Matrice d'adjacence pour le deuxième exemple : $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Remarques :

- _ Dans le cas d'un graphe non orienté, la matrice d'adjacence est symétrique, et à diagonale nulle.
- _ La matrice d'adjacence dépend de l'ordre choisi pour les sommets

Propriété :

Soit Γ un graphe de matrice d'adjacence A .

Soit U le vecteur de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ne contenant que des '1'. $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

Alors $B = AU$ est un vecteur colonne qui contient le degré de chaque sommet du graphe.

Exemple :

Dans le deuxième exemple : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. On retrouve bien les degrés des sommets.

4. Chaines et connexité

Définition :

On appelle **chaîne (ou chemin)** toute liste de sommets reliés successivement par une arête.
 (c'est donc une succession d'arêtes)
 Si le sommet d'arrivée est le même que le sommet de départ, on dit que la chaîne est fermée.
 Si chaque arête d'une chaîne fermée n'est parcourue qu'une fois, cette chaîne est appelée un **cycle**.
 On appelle **chaîne eulérienne** toute chaîne qui parcourt une et une seule fois toutes les arêtes du graphe.
 On appelle **cycle eulérien** tout cycle qui parcourt une et une seule fois toutes les arêtes du graphe.
 Un graphe qui contient un cycle eulérien est appelé **graphe eulérien**.

Remarque :

Graphiquement, une chaîne eulérienne peut être tracée d'un trait continu sans repasser par une arête déjà tracée.

Exemple :

Dans l'exemple 2 :

Donner un cycle : (1,2,3,1)

Existe-t-il une chaîne eulérienne ? Oui, la chaîne (1, 3, 1, 1, 2, 3, 4)

Le graphe est-il eulérien ?

Non, il n'y pas de cycle eulérien.

Définition

On dit qu'un graphe est **connexe** si chaque sommet peut être relié par un chemin à chaque autre sommet.

Exemples :

Exemple 1 : Oui

Exemple 2 : Non (4 n'est pas relié à 1)

Propriété : **Chemins et matrice d'adjacence**

Soit G un graphe orienté à n sommets. Soit A sa matrice d'adjacence. Soit d un entier naturel.
 Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, le $(i, j)^{\text{ème}}$ coefficient de la matrice A^d est le **nombre de chemins de longueur d du sommet i au sommet j** .

Remarque :

Dans le cas d'un graphe pondéré, on appelle "**poids**" d'un chemin, la **somme des poids des arêtes** qui le composent.

Exemple : Suite de l'exemple 2. On a trouvé : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Combien de chemins de longueur 2 existe-t-il entre les sommets 1 et 3 ?

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

il y en a deux Vérification : 1,2,3 et 1,1,3

Propriété : **Graphe connexe et matrice d'adjacence**

Soit G un graphe orienté à n sommets. Soit A sa matrice d'adjacence.

G est connexe si et seulement si la matrice $I_n + A + \dots + A^{n-1}$ a tous ses coefficients strictement positifs.

Démonstration :

_ le $(i, j)^{\text{ème}}$ coefficient de $I_n + A + \dots + A^{n-1}$ compte le nombre de chemins de longueur inférieure à $n - 1$ entre les sommets i et j . S'il est non nul, il existe donc au moins un chemin.

_ inversement, s'il existe un chemin entre les sommets i et j , il existe un chemin de longueur inférieure ou égale à $n - 1$. (Sinon, on passe deux fois par le même sommet, donc on peut enlever un cycle pour réduire le chemin).

Exemple : Suite de l'exemple 2. Le graphe est-il connexe ?

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad I_3 + A + A^2 + A^3 =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 6 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 4 & 2 \\ \color{red}{0} & \color{red}{0} & \color{red}{0} & 1 \end{pmatrix}$$

donc le graphe n'est pas connexe.

Propriété :

Soit G un graphe **connexe**.

1) G possède une **chaîne eulérienne** entre deux sommets si :

- _ ces deux sommets sont de degrés impairs
- _ tous les autres sommets sont de degré pair.

Dans ce cas, les sommets de degré impairs sont les extrémités de la chaîne.

2) G est un **graphe eulérien** si et seulement si tous les sommets sont de degré pair.

5. Recherche d'un plus court chemin dans un graphe pondéré : Algorithme de Dijkstra.

Dans un graphe pondéré, on désire déterminer le chemin le plus court entre deux sommets donnés.

Algorithme mathématique :

Dans un tableau à double entrée, on liste dans la première ligne tous les sommets, et on ajoute une colonne "choix" qui désignera, à chaque étape le choix du sommet à étudier ensuite. Chaque ligne du tableau va décrire une étape de l'algorithme.

Etape 1 : En ligne 1, on affecte au point d'entrée le poids 0, et aux autres l'infini.

On choisit symboliquement le point d'entrée en dernière colonne.

Etape 2 : En ligne 2

_ si un sommet est adjacent au point d'entrée, on l'affecte de sa distance au point d'entrée, en indiquant à droite la provenance

_ les sommets non adjacents restent à l'infini.

On continue ainsi tant que le sommet de sortie n'a pas été atteint.

A chaque étape :

On passe au sommet suivant et on ajoute à son poids les distances à ses sommets adjacents.

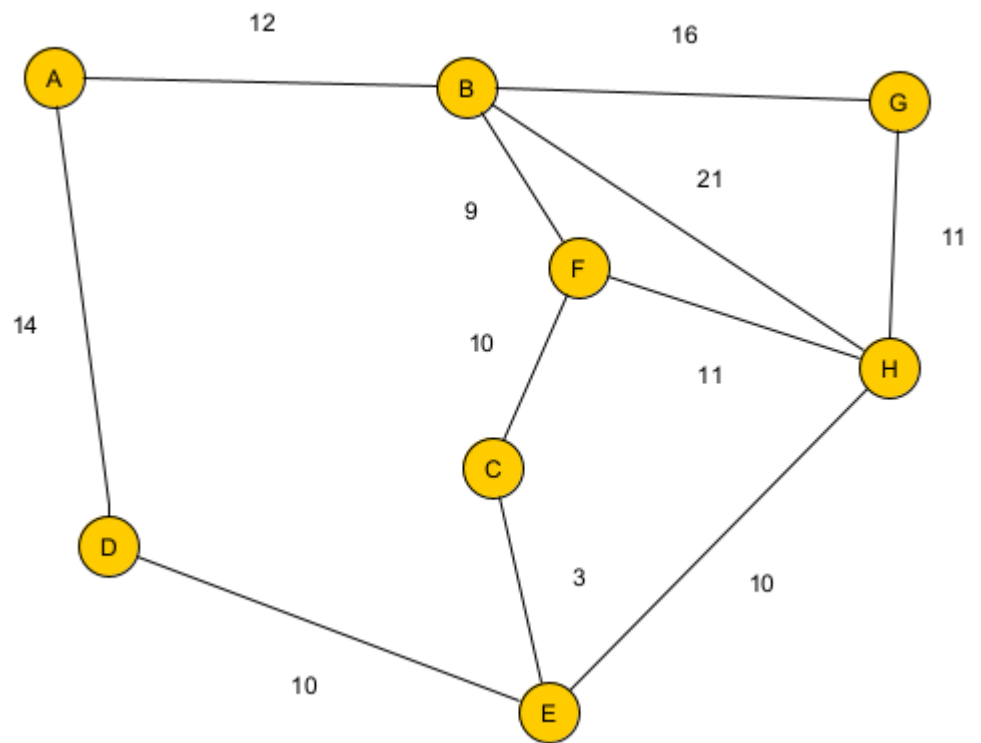
Si pour un sommet, on trouve un poids inférieur au poids inscrit précédemment, on inscrit ce nouveau poids suivi de sa provenance. S'il est identique ou supérieur, on conserve l'ancien et sa provenance.

Une fois tous les points étudiés, on choisit le sommet dont le chemin est le plus court. (on marquera la longueur de ce chemin entre parenthèses).

A la fin, on obtient la longueur de chemin la plus courte. Pour retrouver le chemin, on utilise la provenance notée dans le tableau.

Exemple :

On considère le graphe
suivant :



On cherche le chemin le plus court pour aller du point A au point H.

A	B	C	D	E	F	G	H	Choix
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	A (0)
	12 (A)	∞	14 (A)	∞	∞	∞	∞	B (12)
		∞	14 (A)	∞	21 (B)	28 (B)	33 (B)	D (14)
		∞		24 (D)	21 (B)	28 (B)	33 (B)	F (21)
		31 (F)		24 (D)		28 (B)	32 (F)	E (24)
		27 (E)				28 (B)	32 (F)	C (27)
						28 (B)	32 (F)	G (28)
							32 (F)	H (32)

Le meilleur chemin entre A et H est donc de longueur 32.

Ce chemin est : A – B – F – H

6. Complément : Graphes et réseaux sociaux

Considérons un réseau social type Facebook : il peut être représenté par un graphe :

- _ les membres sont représentés par des sommets
- _ les liens d'amitié sont représentés par des arêtes.

Le graphe est non orienté, car le lien d'amitié n'est valide que s'il est accepté par les deux membres.

Considérons maintenant un réseau social type Twitter :

Il peut également être représenté par un graphe, mais celui-ci sera orienté : bien que vous soyez intéressé par les actualités d'Elon Musk ou Bill Gates, ce n'est pas sûr que cela soit réciproque...

Dans un réseau social, tous les individus n'ont pas les mêmes positions, certains ont plus d'influence que d'autres. Pour quantifier cette influence (et dénicher des influenceurs), on introduit les notions de centralité et d'intermédiarité :

Définition :

Soit G un graphe non orienté à n sommets $(s_1, \dots, s_n)$.

Pour $i \in \{1, \dots, n\}$, on note d_i le degré du sommet s_i

On appelle **degré de centralité** du sommet s_i le nombre $\frac{d_i}{n-1}$.

Remarques :

- _ Le degré de centralité est donc un réel entre 0 et 1. Plus il est proche de 1, plus l'individu a un potentiel d'interactions.
- _ Pour un graphe orienté, on peut séparer le degré de centralité entrant et le degré de centralité sortant.

Définition

Soit G un graphe connexe à n sommets $(s_1, \dots, s_n)$.

Pour tout couple (i, j) de $\{1, \dots, n\}^2$, on note :

- _ $n_{i,j}$ le nombre de plus courts chemins entre s_i et s_j
- _ $n_{i,j}(s_k)$ le nombre de plus courts chemins entre s_i et s_j passant par s_k .

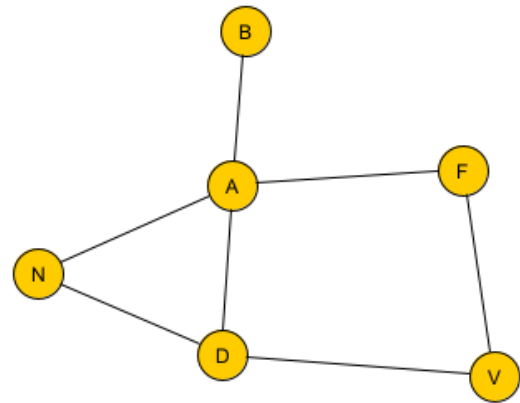
On appelle degré d'intermédiarité du sommet s_k le nombre : $\sum_{(i,j) \in E} \frac{n_{i,j}(s_k)}{n_{i,j}}$, où E est l'ensemble des couples de sommets distincts de s_k , ordonnés si le graphe est orienté, non ordonnés sinon.

Remarque :

Le degré d'intermédiarité permet de mesurer l'influence d'un sommet sur les transferts de données dans un graphe.

Exemple :

Considérons un réseau social entre 6 personnes, représenté par le graphe suivant :



1) Calculer le degré de centralité de A : $\frac{4}{5}$

2) Calculer le degré d'intermédiarité de A :

Couple de sommets	B-D	B-F	B-N	B-V	D-F	D-N	D-V	F-V	F-N	N-V
Longueur du plus court chemin	2	2	2	3	2	1	1	1	2	2
$n_{i,j}$	1	1	1	2	2	1	1	1	1	1
$n_{i,j}(A)$	1	1	1	2	1	0	0	0	1	0

Donc degré d'intermédiarité de A : $\frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{2}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} = 5,5$