Chapitre 18 : Lois usuelles – Correction niveau 2

Exercice 1

1. a) Si A n'a pas de valeurs propres, alors A n'a pas de vecteurs propres, donc pas de base de vecteurs propres, donc A n'est pas diagonalisable.

Si A a une seule valeur propre λ :

supposons que A soit diagonalisable : alors il existe une matrice P inversible telle que

$A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda I$ donc $A = P(\lambda I)P^{-1} = \lambda PIP^{-1} = \lambda I$

Or $A \neq \lambda I$ donc A n'est pas diagonalisable.

Si A a deux valeurs propres distinctes : comme $A \in M_2(\mathbb{R})$, alors A est diagonalisable.

Conclusion : A est diagonalisable si et seulement si A admet deux valeurs propres distinctes.

b) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $X = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$. $A - \lambda I_2 = \begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & 4x - \lambda \end{pmatrix}$

λ valeur propre de A $\Leftrightarrow A - \lambda I_2$ non inversible $\Leftrightarrow (-\lambda)(4x - \lambda) - (-1)1 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 4x\lambda + 1 = 0$

c) A est diagonalisable ssi A admet deux valeurs propres distinctes, donc ssi $\Delta > 0$.

$\Delta > 0 \Leftrightarrow 16x^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow x^2 > \dfrac{1}{4}$

2. a) $F_X(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ x \text{ si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 \text{ si } x > 1 \end{cases}$ Posons $Y = X^2$. $\forall\, y \in \mathbb{R}$, $F_Y(y) = P(X^2 \leq y)$

_ si $y < 0$: pas de solution $F_Y(y) = 0$

_ si $y \geq 0$, $F_Y(y) = P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) = F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y})$

$-\sqrt{y} \leq 0$ donc $F_Y(-\sqrt{y}) = 0$ $\quad \sqrt{y} \geq 0$ et $\sqrt{y} \leq 1 \Leftrightarrow y \leq 1$

_ si $0 \leq y \leq 1$ $\quad 0 \leq \sqrt{y} \leq 1$ donc $F_Y(y) = F_X(\sqrt{y}) = \sqrt{y}$

_ si $y > 1$ $\quad \sqrt{y} > 1$ donc $F_Y(y) = F_X(\sqrt{y}) = 1$ $\qquad$ Donc $F_Y(y) = \begin{cases} 0 \text{ si } y < 0 \\ \sqrt{y} \text{ si } 0 \leq y \leq 1 \\ 1 \text{ si } y > 1 \end{cases}$

b) $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 4X \end{pmatrix}$ est diagonalisable ssi $X^2 > \dfrac{1}{4}$. $P\left(X^2 > \dfrac{1}{4}\right) = 1 - P\left(X^2 \leq \dfrac{1}{4}\right) = 1 - F_Y\left(\dfrac{1}{4}\right) = 1 - \sqrt{\dfrac{1}{4}} = \dfrac{1}{2}$.

Exercice 2

1) $\{X\} \in [0;1]$ donc si $z < 0$ $F_Z(z) = P(\{X\} \leq z) = 0$ $\qquad$ si $z \geq 1$, $F_Z(z) = P(\{X\} \leq z) = 1$

2) a) $(Z \leq z) = (0 \leq Z \leq z) = (0 \leq X \leq z) \cup (1 \leq X \leq 1 + z) \cup \ldots = \cup_{n \in \mathbb{N}} (n \leq X \leq n + z)$ (réunion disjointe). Donc $F_Z(z) = P(Z \leq z) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(n \leq X \leq n + z)$

b) Donc $F_Z(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (F_X(n + z) - F_X(n)) = \sum_{n=0}^{+\infty} (1 - e^{-(n+z)} - (1 - e^{-n}))$

$= \sum_{n=0}^{+\infty} (e^{-n} - e^{-n-z}) = \sum_{n=0}^{+\infty} (1 - e^{-z})\, e^{-n} = (1 - e^{-z}) \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\dfrac{1}{e}\right)^n = (1 - e^{-z}) \times \dfrac{1}{1 - \dfrac{1}{e}} = \dfrac{1 - e^{-z}}{1 - e^{-1}}$

3) $F_Z(z) = \begin{cases} 0 \text{ si } z < 0 \\ \dfrac{1 - e^{-z}}{1 - e^{-1}} \text{ si } 0 \leq z \leq 1 \\ 1 \text{ si } z > 1 \end{cases}$

On voit que F_Z est continue et de classe C^1 sur $]-\infty;0[$, $]0;1[$, et $]1;+\infty[$.

$\lim\limits_{z\to 0}\frac{1-e^{-z}}{1-e^{-1}} = \frac{1-1}{1-e^{-1}} = 0 \quad \lim\limits_{z\to 1}\frac{1-e^{-z}}{1-e^{-1}} = \frac{1-e^{-1}}{1-e^{-1}} = 1$ donc F_Z est continue sur $\mathbb{R}$.

Donc Z est une VAR à densité et une densité est $f_Z(z) = \begin{cases} 0 \text{ si } z < 0 \\ \frac{1}{1-e^{-1}} e^{-z} \text{ si } 0 \leq z \leq 1 \\ 0 \text{ si } z > 1 \end{cases}$

Exercice 3

1) $\forall z \in \mathbb{R}$, $F_Z(z) = P(Z \leq z) = P((X \leq z)\cap(Y \leq z))$

$= P(X \leq z)P(Y \leq z)$ (X, Y indépendants) $= \Phi(z)^2$

2) Φ est continue et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ donc F_Z aussi.

Donc Z est une variable à densité et une densité est $g = F_Z' = 2\,\Phi\,\Phi' = 2\,\Phi\, f$

$\forall z \in \mathbb{R}$, $g(z) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)\Phi(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)\Phi(z)$

3) $\int_A^B xg(x)dx$: Ipp : $\begin{cases} u(x) = \Phi(x) \\ v'(x) = \sqrt{2/\pi}\, x\exp(-x^2/2) \end{cases}$ $\begin{cases} u'(x) = f(x) \\ v(x) = -\sqrt{2/\pi}\exp(-x^2/2) = -2f(x) \end{cases}$

$\int_A^B xg(x)dx = \left[-2f(x)\,\Phi(x)\right]_A^B + \int_A^B 2f(x)^2dx$

$\int_A^B 2f(x)^2dx = \int_A^B \frac{2}{2\pi}\exp(-x^2)dx = \frac{1}{\pi}\int_A^B \exp(-2x^2/2)dx = \frac{1}{\pi}\int_A^B \exp(-(\sqrt{2}x)^2/2)dx$

Posons $y = \sqrt{2}x \quad x = \frac{y}{\sqrt{2}} \qquad dx = \frac{dy}{\sqrt{2}}$ donc

$I = \frac{1}{\pi}\int_{A\sqrt{2}}^{B\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}}\exp(-y^2/2)dy = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{A\sqrt{2}}^{B\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-y^2/2)dy = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{A\sqrt{2}}^{B\sqrt{2}} f(y)dy$

4) $\forall B \geq 0$, $\int_0^B xg(x)dx = 2f(0)\Phi(0) - 2f(B)\Phi(B) + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{B\sqrt{2}} f(x)dx$

avec $2f(0)\Phi(0) = 2 \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$

$\lim\limits_{B\to+\infty} f(B) = 0 \quad \lim\limits_{B\to+\infty}\Phi(B) = 1$ (fonction de répartition) $\lim\limits_{B\to+\infty}\int_0^{B\sqrt{2}} f(x)dx = \int_0^{+\infty} f(x)dx = \frac{1}{2}$

(car f densité et f paire).

Donc $\int_0^{+\infty} xg(x)dx$ converge et vaut $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{2\sqrt{\pi}}$.

De même, $\forall A \leq 0, \int_A^0 xg(x)dx = -2f(0)\Phi(0) + 2f(A)\Phi(A) + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{A\sqrt{2}}^0 f(x)dx$

$\lim\limits_{A\to-\infty} f(A) = 0 \quad \lim\limits_{A\to-\infty}\Phi(A) = 0 \quad \lim\limits_{A\to-\infty}\int_{A\sqrt{2}}^0 f(x)dx = \frac{1}{2}$ donc $\int_{-\infty}^0 xg(x)dx$ converge et vaut

$-\frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{2\sqrt{\pi}}$. Donc Z admet une espérance et $E(Z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$.

5) $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_{Z^2}(x) = P(Z^2 \leq x)$ _ si $x < 0$, $F_{Z^2}(x) = 0$

_ si $x \geq 0$, $F_{Z^2}(x) = P(-\sqrt{x} \leq Z \leq \sqrt{x}) = F_Z(\sqrt{x}) - F_Z(-\sqrt{x}) = \Phi(\sqrt{x})^2 - \Phi(-\sqrt{x})^2$

$= \left(\Phi(\sqrt{x}) + \Phi(-\sqrt{x})\right)\left(\Phi(\sqrt{x}) - \Phi(-\sqrt{x})\right) = 1\left(\Phi(\sqrt{x}) - \Phi(-\sqrt{x})\right) = \Phi(\sqrt{x}) - \Phi(-\sqrt{x})$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $F_{X^2}(x) = P(X^2 \leq x)$ _ si $x < 0$, $F_{X^2}(x) = 0$

_ si $x \geq 0$, $F_{X^2}(x) = P(-\sqrt{x} \leq X \leq \sqrt{x}) = F_X(\sqrt{x}) - F_X(-\sqrt{x}) = \Phi(\sqrt{x}) - \Phi(-\sqrt{x})$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_{Z^2}(x) = F_{X^2}(x)$ Z^2 et X^2 suivent la même loi.

$E(X^2) = V(X) + E(X)^2 = 1 + 0 = 1$. Donc $E(Z^2) = 1 \quad V(Z) = E(Z^2) - E(Z)^2 = 1 - \frac{1}{\pi} = \frac{\pi - 1}{\pi}$.