Chapitre 18 : Lois usuelles – Exercices niveau 2

Exercice 1 Loi uniforme et matrices diagonalisables

1. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 4x \end{pmatrix}$, où x désigne un nombre réel.

a) Montrer que A est diagonalisable si et seulement si A possède deux valeurs propres distinctes.
b) Ecrire l'équation dont les solutions sont les valeurs propres de la matrice A.
c) En déduire que A est diagonalisable si et seulement si : $x^2 > \frac{1}{4}$.

2. Dans la suite X est une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé (Ω, T, P) et qui suit la loi uniforme sur $[0;1]$.
a) Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire X^2.
b) En déduire que la probabilité que la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 4X \end{pmatrix}$ soit diagonalisable vaut $\frac{1}{2}$.

Exercice 2 – Partie fractionnaire

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi $\mathcal{E}(1)$.
Si $x \in \mathbb{R}$, on note $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ la partie fractionnaire de x.
Par exemple si $x = 12,34$ alors $\{x\} = 0,34$.
On note enfin $Z = \{X\}$
1) Déterminer $F_Z(z)$ pour $z < 0$ et $z > 1$.
2) Soit $z \in [0;1]$.
a) Montrer que $F_Z(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(n \leq X \leq n + z)$.
b) En déduire que $F_Z(z) = \frac{1 - e^{-z}}{1 - e^{-1}}$.
3) En déduire que Z est une variable à densité, et déterminer une densité de Z.

Exercice 3

Soient X et Y deux VAR suivant chacune la loi normale centrée réduite, indépendantes.
On notera f la densité de X et Y, et Φ la fonction de répartition.
On définit la V.A.R. $Z = \max(X, Y)$.
1) Déterminer la fonction de répartition F_Z de Z.
2) Montrer que Z est une variable à densité. Déterminer une densité, notée g, qu'on exprimera en fonction de Φ.
3) Montrer que : $\forall (A, B) \in \mathbb{R}^2$, $\int_A^B x g(x)dx = \left[- 2f(x)\Phi(x)\right]_A^B + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{A\sqrt{2}}^{B\sqrt{2}} f(x)dx$.
4) En déduire que Z admet une espérance et calculer E(Z).
5) Montrer que X^2 et Z^2 suivent la même loi. En déduire V(Z).