Chapitre 18 : Lois usuelles – Feuille n°1

Exercice 1
Soit X une variable aléatoire qui suit la loi $\mathcal{U}([0;1])$, et a, b des réels avec $a < b$.
1) Rappeler la fonction de répartition F_X.
2) Montrer que la variable aléatoire $Y = a + (b - a)X$ suit la loi uniforme sur $[a;b]$.

Exercice 2 – Méthode d'inversion
Soit X une variable aléatoire à densité, de densité f.
On suppose que f est continue sur $\mathbb{R}$ et que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > 0$.
On note F_X la fonction de répartition de X.
1) Montrer que F_X réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle que l'on précisera.
2) Soit U une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $]0;1[$. On pose $V = F_X^{-1}(U)$.
Montrer que V suit la même loi que X.

Exercice 3
Soit $\lambda > 0$. Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de Laplace $\mathcal{L}(\lambda)$. (voir ex. 4 feuille 1 du chapitre 15).

On rappelle que : $F_X(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{\lambda x}}{2} \text{ si } x < 0 \\ 1 - \dfrac{e^{-\lambda x}}{2} \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$

Soit $Y = |X|$. Montrer que Y suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.

Exercice 4
Soit $\lambda > 0$. Soit X une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ et Y une variable aléatoire discrète qui prend les valeurs 1 et -1 de manière équiprobable.
On considère que X et Y sont indépendantes.
On pose $Z = XY$.
1) Montrer que $\forall z \in \mathbb{R}, P(Z \leq z) = \dfrac{1}{2} P(X \leq z) + \dfrac{1}{2} P(X \geq -z)$
(on pourra s'aider du système complet d'événements (Y = 1), (Y = -1))
2) En déduire que Z suit la loi de Laplace de paramètre λ.
3) Ecrire un programme Python qui simule une variable aléatoire Z qui suit la loi de Laplace de paramètre 2.

Exercice 5
Rappel : si x est un réel, on appelle partie entière de x, notée $\lfloor x \rfloor$, le plus grand entier inférieur ou égal à x.
On a donc $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$.
Soit X une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$.
On pose $Y = \lfloor X \rfloor$.
1) Déterminer $Y(\Omega)$
2) $\forall k \in \mathbb{N}$, montrer que $P(Y = k) = \dfrac{e - 1}{e^{k+1}}$.
3) Montrer que la variable aléatoire $Z = Y + 1$ suit une loi usuelle dont on précisera le paramètre.

Exercice 6
Soit X une VAR qui suit la loi uniforme sur $[0;1[$. On pose $Y = -2.\ln(1 - X)$.
Montrer que Y suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.