Chapitre 18 : Lois usuelles – Feuille n°2

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ 9xe^{-3x} \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$

1) Montrer que f est une densité de probabilité.
2) Soit X une variable aléatoire de densité f. Montrer que X admet une espérance et calculer E(X).

Exercice 2

Soit X une VAR qui suit la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.
A l'aide du tableau, déterminer le réel t strictement positif tel que $P(-t < X < t) = 0,95$.

Exercice 3

Déterminer la valeur de $\int_0^{+\infty} e^{-x^2/2}dx$.

Exercice 4

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. Quelle est la loi de $Y = -X$?

Exercice 5

Soit X une VAR qui suit la loi normale $\mathcal{N}(8,4)$. A l'aide du tableau, déterminer :
a) $P(X < 7,5)$ b) $P(X > 8,5)$ c) $P(6,5 < X < 10)$ d) $P_{(X > 5)}(X > 6)$

Exercice 6

Soit Z une variable aléatoire suivant une loi normale d'espérance nulle et de variance 1/2.
A l'aide de Z, montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} x^2e^{-x^2}dx$ converge et que $\int_0^{+\infty} x^2e^{-x^2}dx = \dfrac{\sqrt{\pi}}{4}$.

Exercice 7 (En plus)

1) Soit $\lambda > 0$ et X une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre λ.
a) Montrer que $\forall\, n \geq 1$, X^n admet une espérance, que l'on notera m_n.
b) Montrer que $\forall\, n \geq 2$, $m_n = \dfrac{n}{\lambda} m_{n-1}$
c) En déduire que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $m_n = \dfrac{n!}{\lambda^n}$.
2) Soit Y une variable aléatoire qui suit la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.
a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, Y^n admet une espérance, que l'on notera r_n.
b) Pour $k \in \mathbb{N}$, déterminer r_{2k+1}.
c) Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}$, $r_{2k+2} = (2k + 1)r_{2k}$
d) En déduire que $\forall k \in \mathbb{N}$, $r_{2k} = \dfrac{(2k)!}{2^k\, k!}$