

Chapitre 18 : Variables à densité : Lois usuelles

1. Loi uniforme

1.1 Densité de la loi uniforme

Propriété - Définition :

Soit a et b deux réels avec $a < b$.

La fonction f définie par : $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a, b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ est une densité de probabilité.

Si X est une VAR de densité f , on dit que X suit la loi uniforme $\mathcal{U}([a;b])$.

Démonstration :

_ comme $b - a > 0$, $\forall x \in [a; b]$ $f(x) = \frac{1}{b-a} \geq 0$ donc f est positive sur $\mathbb{R}$.

_ f est continue sur $]-\infty; a[$, $]a; b[$ et $]b; +\infty[$ comme fonction constante, donc continue sur $\mathbb{R}$ sauf en a et b .

_ f est à support sur $[a; b]$ et $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \frac{1}{b-a}dx = \frac{1}{b-a} (b-a) = 1$

donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ converge et vaut 1.

Donc f est une densité de probabilité.

Remarques :

_ on parle de loi "uniforme", car la densité est constante sur $[a; b]$.

_ Les lois uniformes sur $]a, b[$, $]a, b]$ ou $[a, b[$ ont la même densité de probabilité.

Courbe :

1.2 Fonction de répartition

Propriété :

$$\text{Si } X \longrightarrow \mathcal{U}([a;b]) \text{ alors } F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 1 & \text{si } x > b \end{cases}$$

Démonstration : $\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$

$$_ \text{ si } x < a : F_X(x) = \int_{-\infty}^x 0dt = 0$$

$$_ \text{ si } a \leq x \leq b, F_X(x) = \int_{-\infty}^a f(t)dt + \int_a^x f(t)dt = 0 + \int_a^x \frac{1}{b-a}dt = \frac{1}{b-a}(x-a) = \frac{x-a}{b-a}$$

$$_ \text{ si } x > b, F_X(x) = \int_{-\infty}^a f(t)dt + \int_a^b f(t)dt + \int_b^x f(t)dt = 0 + 1 + 0 = 1$$

D'où le résultat annoncé.

Courbe :

Remarques :

- _ si $X \longrightarrow \mathcal{U}([a;b])$, X prend ses valeurs dans $[a;b]$. On retrouve que : $F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ 1 & \text{si } x > b \end{cases}$
- _ f_X est continue sur $\mathbb{R}$ sauf en a et b . F_X est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf a et b .

Propriété : (Cas particulier avec $a = 0$ et $b = 1$)Si $X \longrightarrow \mathcal{U}([0,1])$ alors :

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases} \quad F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Propriété :

- _ Soit X une variable aléatoire qui suit la loi $\mathcal{U}([0;1])$. Soit a et b deux réels tels que $a < b$. Alors $Y = a + (b-a)X$ suit la loi $\mathcal{U}([a;b])$.
- _ inversement, si X est une variable aléatoire qui suit la loi $\mathcal{U}([a;b])$ (avec $a < b$), alors $Y = \frac{X-a}{b-a}$ suit la loi $\mathcal{U}([0;1])$

Démonstration : en exercice

1.3 Simulation en Python

On utilise la bibliothèque `numpy.random` de la manière suivante : **`import numpy.random as rd`**

`x=rd.random()` simule la loi $\mathcal{U}([0;1])$

Donc **`x = a + (b - a)*rd.random()`** suit la loi $\mathcal{U}([a;b])$.

Remarque :

Soit $p \in]0;1[$. Soit $X \longrightarrow \mathcal{U}([0;1])$. Alors $P(X < p) = F_X(p) = p$.

Donc en Python : **`rd.random()<p` est un événement de probabilité p .**

1.4 Espérance et variance

Propriété :

Si $X \longrightarrow \mathcal{U}([a;b])$ alors X admet une espérance et une variance et

$$E(X) = \frac{a+b}{2} \quad V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Démonstration :

2. Loi exponentielle

2.1 Densité et fonction de répartition

Propriété - Définition :

Soit $\lambda > 0$.

La fonction f définie par : $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ est une densité de probabilité.

Si X est une VAR de densité f , on dit que X suit la loi exponentielle de paramètre λ , notée $\mathcal{E}(\lambda)$.

Démonstration :

_ f est nulle sur $]-\infty; 0[$ et $\forall x \in [0; +\infty[, \lambda \geq 0$ et $e^{-\lambda x} \geq 0$ donc $f(x) \geq 0$.

Donc f est positive sur $\mathbb{R}$.

_ f est continue sur $]-\infty; 0[$ (fonction nulle) et sur $]0; +\infty[$ (car exp est continue), donc f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en 0.

_ f est à support sur $[0; +\infty[$ et $\forall X \geq 0$, $\int_0^X f(x)dx = \int_0^X \lambda e^{-\lambda x} dx = [-e^{-\lambda x}]_0^X = -e^{-\lambda X} + 1$

$\lim_{X \rightarrow +\infty} -e^{-\lambda X} + 1 = 1$ donc $\int_0^{+\infty} f(x)dx = 1$ donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ converge et vaut 1.

Donc f est une densité de probabilité.

Courbe :

Propriété :

Si $X \longrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ alors $F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

Démonstration :

$\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$

_ si $x < 0$, $F_X(x) = \int_{-\infty}^x 0dt = 0$

_ si $x \geq 0$, $F_X(x) = \int_{-\infty}^0 f(t)dt + \int_0^x f(t)dt = 0 + 1 - e^{-\lambda x} = 1 - e^{-\lambda x}$.

Remarque :

f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf en 0. Donc F_X est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf en 0.

Courbe :

Remarque : (*Variable sans mémoire*)

Si $X \longrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$, alors $\forall s \geq 0, \forall t \geq 0, \mathbf{P}_{(X > s)}(X > s + t) = \mathbf{P}(X > t)$

Démonstration :

Remarque : **Très classique, à redémontrer :**

Soit $\lambda > 0$. Si $X \longrightarrow \mathcal{U}[0;1]$, alors $Y = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - X) \longrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$.

Démonstration :

Remarque : Il s'agit d'un cas particulier de la méthode d'inversion vue en exercice

En Python(avec `import numpy.random as rd`)**`x=rd.exponential(1/λ)` simule la loi $\mathcal{E}(\lambda)$**

Attention, le paramètre est $\frac{1}{\lambda}$, qui correspond, comme on le verra rapidement, à l'espérance.

Remarque :

On sait que `rd.random()` simule la loi $\mathcal{U}([0;1])$.Donc d'après la remarque précédente **`x = -np.log(1 - rd.random())/lambda`** simule la loi $\mathcal{E}(\lambda)$ **2.2 Espérance, variance**

Propriété :

Si $X \longrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ alors X admet une espérance et une variance et $E(X) = \frac{1}{\lambda}$ et $V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$.

Démonstration :

$$-\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^{+\infty} \lambda x e^{-\lambda x} dx$$

$$\text{Soit } X \geq 0 \text{ et } I(X) = \int_0^X x \lambda e^{-\lambda x} dx$$

$$\text{Intégration par parties : } \begin{cases} u = x \\ v' = \lambda e^{-\lambda x} \end{cases} \quad \begin{cases} u' = 1 \\ v = -e^{-\lambda x} \end{cases} \quad (u, v \text{ sont de classe } C^1)$$

$$\text{alors } I(X) = [-x e^{-\lambda x}]_0^X + \int_0^X e^{-\lambda x} dx = -X e^{-\lambda X} + \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \right]_0^X = -X e^{-\lambda X} - \frac{e^{-\lambda X}}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}$$

$$\lim_{X \rightarrow +\infty} -X e^{-\lambda X} = 0 \text{ (croiss comp)} \quad \lim_{X \rightarrow +\infty} -\frac{e^{-\lambda X}}{\lambda} = 0 \text{ donc l'intégrale converge et vaut } \frac{1}{\lambda}.$$

$$\text{Donc } X \text{ admet une espérance et } E(X) = \frac{1}{\lambda}.$$

$$-\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = \int_0^{+\infty} x^2 f(x)dx = \int_0^{+\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx$$

$$\text{Soit } X \geq 0 \text{ et } J(X) = \int_0^X x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx$$

$$\text{Intégration par parties : } \begin{cases} u = x^2 \\ v' = \lambda e^{-\lambda x} \end{cases} \quad \begin{cases} u' = 2x \\ v = -e^{-\lambda x} \end{cases} \quad u \text{ et } v \text{ sont de classe } C^1$$

$$\text{donc } J(X) = [-x^2 e^{-\lambda x}]_0^X + 2 \int_0^X x e^{-\lambda x} dx = -X^2 e^{-\lambda X} + \frac{2}{\lambda} I(X)$$

$$\lim_{X \rightarrow +\infty} -X^2 e^{-\lambda X} = 0 \quad \lim_{X \rightarrow +\infty} I(X) = \frac{1}{\lambda} \text{ donc } \lim_{X \rightarrow +\infty} J(X) = \frac{2}{\lambda^2}. \text{ Donc } E(X^2) \text{ existe et vaut } \frac{2}{\lambda^2}.$$

$$\text{Donc } X \text{ admet une variance et } V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Remarque :

On peut montrer que $\forall n \geq 1$, X^n admet une espérance.

Pour le déterminer, faire une intégration par parties pour trouver une relation de récurrence, puis $E(X^n)$ à l'aide de n !

Important :

_ Les valeurs des intégrales $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx$ $\int_0^{+\infty} x e^{-\lambda x} dx$ $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-\lambda x} dx$ peuvent être déterminées facilement à l'aide de la densité, de $E(X)$ et de $E(X^2)$ si $X \longrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$.

Exemple :

Soit $I = \int_0^{+\infty} e^{-2x} dx$, $J = \int_0^{+\infty} x e^{-2x} dx$ et $K = \int_0^{+\infty} x^2 e^{-2x} dx$.

Montrer que I, J et K convergent et déterminer leurs valeurs.

3. Loi normale (ou de Laplace-Gauss)

3.1 Loi $\mathcal{N}(0,1)$

Propriété – Définition :

La fonction f définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$

est une densité de probabilité.

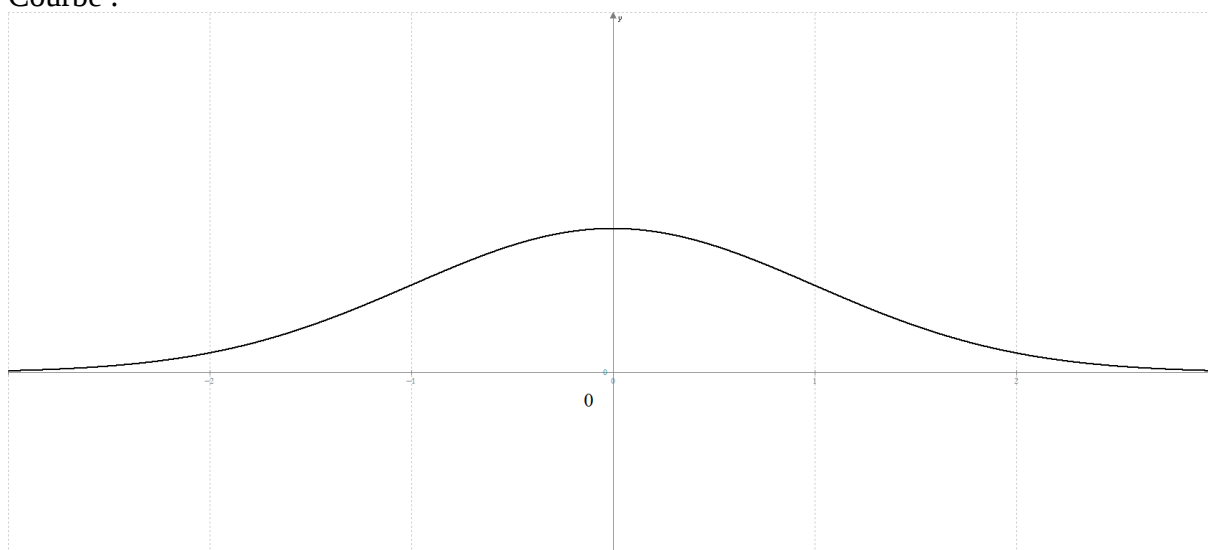
Si X une VAR qui admet pour densité la fonction f , alors on dit que X suit la loi normale centrée réduite et on note $X \rightarrow \mathcal{N}(0,1)$.

Remarques :

_ on voit que f est positive sur $\mathbb{R}$ et continue sur $\mathbb{R}$. On admet que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ converge et vaut 1

_ $\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = f(x)$ donc **f est paire.**

Courbe :



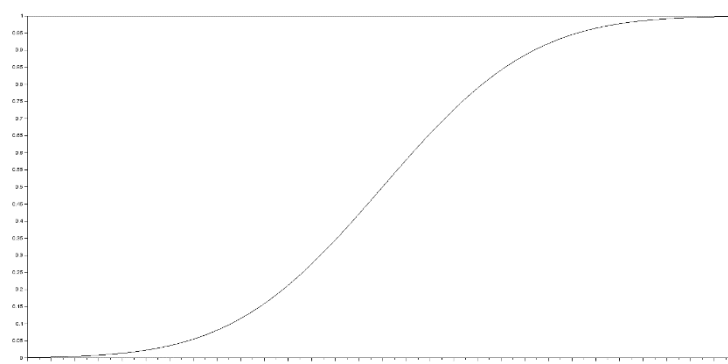
Définition :

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi $\mathcal{N}(0,1)$. On note Φ la fonction de répartition de X .

$$\forall x \in \mathbb{R}, \Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt.$$

Remarque : f est continue sur $\mathbb{R}$ donc Φ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Courbe :



Propriété :

$$_ \Phi(0) = \frac{1}{2}.$$

$$_ \forall x \in \mathbf{R}, \Phi(-x) = 1 - \Phi(x).$$

Démonstration :

Remarques :

_ Les valeurs de Φ pour $x > 0$ sont données dans une table (en colonne : chiffre des centièmes). On trouve les valeurs pour $x < 0$ à l'aide de la formule précédente.

Ex : Soit $X \longrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$. Déterminer $P(X \leq 1,47)$, $P(X \leq -0,92)$, $P(-1 \leq X \leq 1)$.

En Python :

`x = rd.standard_normal()` simule la loi $\mathcal{N}(0,1)$.

Propriété :

Si $X \longrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ alors X admet une espérance et une variance, et :

$$\mathbf{E}(X) = 0 \quad \mathbf{V}(X) = 1 \quad (\sigma(X) = 1)$$

Remarque : Si $X \longrightarrow \mathcal{N}(0,1)$, X est donc une variable aléatoire **centrée réduite**.

Démonstration :

_ $\forall t \in \mathbb{R}$, $(-t)f(-t) = -tf(t)$ (f paire) donc $t \longmapsto tf(t)$ est impaire.

$$\forall T \geq 0, \int_0^T tf(t)dt = \int_0^T \frac{1}{\sqrt{2\pi}} te^{-t^2/2} dt = \left[-\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} \right]_0^T = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-T^2/2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

qui tend vers $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ en $+\infty$. Donc $\int_0^{+\infty} tf(t)$ converge. Donc, par parité, $E(X)$ existe et vaut 0.

_ de même, $\forall t \in \mathbb{R}$, $(-t)^2 f(-t) = t^2 f(t)$ donc $t \longmapsto t^2 f(t)$ est paire.

$$\forall T \geq 0, \int_0^T t^2 f(t)dt = \int_0^T \frac{1}{\sqrt{2\pi}} t^2 e^{-t^2/2} dt$$

Intégration par parties : $\begin{cases} u = \frac{t}{\sqrt{2\pi}} \\ v' = t e^{-t^2/2} \end{cases} \begin{cases} u' = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \\ v = -e^{-t^2/2} \end{cases}$ u et v sont de classe C^1 .

$$\text{Donc } \int_0^T t^2 f(t)dt = \left[-\frac{t e^{-t^2/2}}{2/\sqrt{2\pi}} \right]_0^T + \int_0^T \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt = -\frac{T e^{-T^2/2}}{2/\sqrt{2\pi}} + \int_0^T \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt = 1 \text{ (fonction paire) donc } \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt = \frac{1}{2}.$$

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} -\frac{T e^{-T^2/2}}{2/\sqrt{2\pi}} \text{ (croissances comparées) donc } \int_0^T t^2 f(t)dt \text{ tend vers } \frac{1}{2}.$$

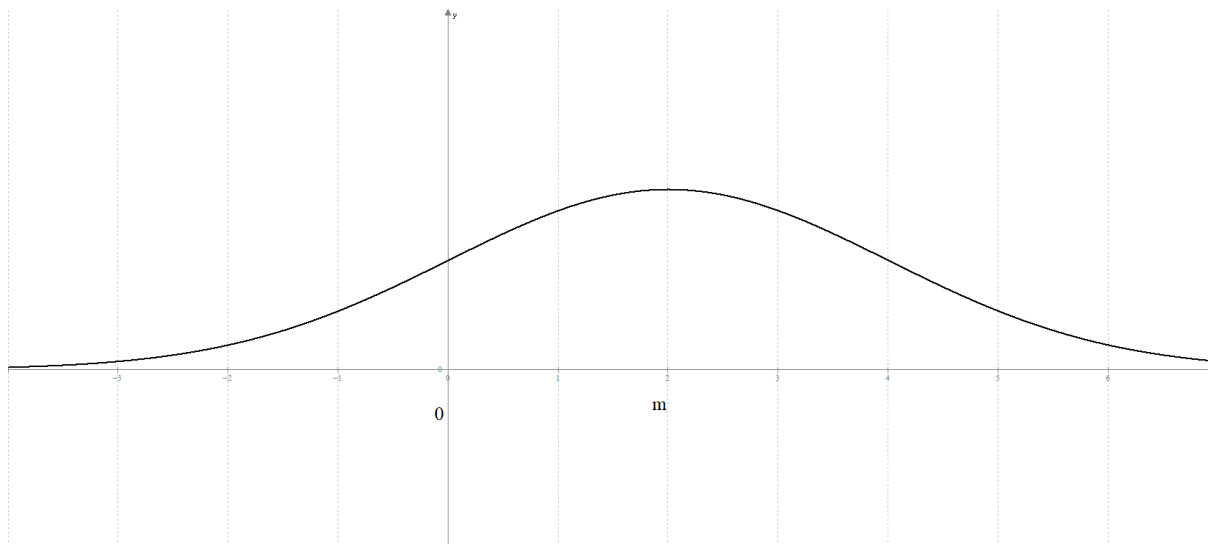
$$\text{Donc, par parité, } \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)dt \text{ converge et vaut } 2 \times \frac{1}{2} = 1 \quad \mathbf{V}(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 1 - 0 = 1.$$

3.2 Loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$

Propriété – Définition :

Soit $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma \in \mathbb{R}^{+*}$. La fonction $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$ est une densité de probabilité.

Si X est une variable aléatoire de densité f , on dit que X suit la loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$.



Propriété :

Soit X une VAR et m et σ deux réels ($\sigma > 0$).

Alors $X \longrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$, si et seulement si $X^* = \frac{X-m}{\sigma} \longrightarrow \mathcal{N}(0,1)$.

Démonstration :

Remarque :

Pour chercher $P(X \leq x)$, on utilise donc $X^* = \frac{X - m}{\sigma}$ et les valeurs du tableau de Φ .

Ex :

Soit $X \rightarrow \mathcal{N}(1, 4)$. A l'aide du tableau, déterminer $P(X \leq 2,3)$.

Corollaire :

Si $X \rightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ alors X admet une espérance et une variance et : $E(X) = m$ $V(X) = \sigma^2$

Démonstration :

$X^* = \frac{X - m}{\sigma} \rightarrow \mathcal{N}(0,1)$ donc $E(X^*) = 0$ et $V(X^*) = 1$

Or $X = \sigma X^* + m$ donc X admet une espérance et une variance et :

$E(X) = \sigma E(X^*) + m = m$ $V(X) = \sigma^2 V(X^*) = \sigma^2$.

Propriété :

Soit $a \neq 0$ et $b \in \mathbb{R}$. Soit X une VAR.

Alors $X \rightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ ssi $Y = aX + b \rightarrow \mathcal{N}(am + b, a^2\sigma^2)$.

Remarque : On peut retenir que si X suit une loi normale, alors $aX + b$ aussi et on trouve les paramètres en utilisant l'espérance et la variance.

Exemple :

Soit $X \rightarrow \mathcal{N}(1,1)$ et soit $Y = 3X + 1$. Déterminer la loi de Y .

En Python :

`x = rd.normal(m, s)` simule la loi $\mathcal{N}(m, s^2)$.

Remarque : Si $X \rightarrow \mathcal{N}(m, s^2)$ $X^* = \frac{X - m}{s} \rightarrow \mathcal{N}(0,1)$.

Comme $X = s.X^* + m$, `x = s × rd.standard_normal() + m` simule aussi la loi de X .
avec grand :

Conclusion :

Loi	Densité $f_X(x) =$	Fonction de répartition $F_X(x) =$	Valeurs prises	Espérance $E(X) =$	Variance $V(X) =$	Simulation en Python
$\mathcal{U}([0;1])$						
$\mathcal{U}([a;b])$						
$\mathcal{E}(\lambda)$						
$\mathcal{N}(0,1)$						
$\mathcal{N}(m, \sigma^2)$						