Chapitre 19 : Fonctions à deux variables – Correction niveau 2

1) a) $\overline{x} = \dfrac{S}{n}$ donc $S = n\overline{x}$

b) $\sigma_x^2 = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2$ $\quad n\,\sigma_x^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} x_i\overline{x} + \sum_{i=1}^{n} \overline{x}^2$

$n\,\sigma_x^2 = T - 2\overline{x}S + n\overline{x}^2$ $\quad n\,\sigma_x^2 = T - 2n\overline{x}^2 + n\overline{x}^2$ $\quad T = n\,\sigma_x^2 + n\overline{x}^2$

c) $\text{ncov}(x,y) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i - \sum_{i=1}^{n} x_i\overline{y} - \sum_{i=1}^{n} \overline{x}y_i + \sum_{i=1}^{n} \overline{x}\,\overline{y}$

$= U - n\overline{x}\,\overline{y} - n\overline{x}\,\overline{y} + n\overline{x}\,\overline{y}$

$U = \text{ncov}(x,y) + n\overline{x}\,\overline{y}$.

2. f est une somme de n polynôme en (a,b), donc f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.

3. a) $\partial_1 f(a,b) = \sum_{i=1}^{n} 2x_i(ax_i + b - y_i) = 2a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2b\sum_{i=1}^{n} x_i - 2\sum_{i=1}^{n} x_iy_i$

$= 2a(n\sigma_x^2 + n\overline{x}^2) + 2bn\overline{x} - 2(\text{ncov}(x,y) + n\overline{x}\,\overline{y})$.

$\partial_2 f(a,b) = \sum_{i=1}^{n} 2(ax_k + b - y_k) = 2a\sum_{i=1}^{n} x_k + 2b\sum_{i=1}^{n} 1 - \sum_{i=1}^{n} 2y_k = 2an\overline{x} + 2bn - 2n\overline{y}$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} a(\sigma_x^2 + \overline{x}^2) + b\overline{x} - (\text{cov}(x,y) + \overline{x}\,\overline{y}) = 0 \\ a\overline{x} + b - \overline{y} = 0 \end{cases}$$

$$\text{b)} \Leftrightarrow \begin{cases} a(\sigma_x^2 + \overline{x}^2) + (\overline{y} - a\overline{x})\overline{x} - \text{cov}(x,y) - \overline{x}\,\overline{y} = 0 \\ b = \overline{y} - a\overline{x} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a\,\sigma_x^2 - \text{cov}(x,y) = 0 \\ b = \overline{y} - a\overline{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{\text{cov}(x,y)}{\sigma_x^2} \\ b = \overline{y} - \dfrac{\text{cov}(x,y)\,\overline{x}}{\sigma_x^2} \end{cases}$$

c) $\partial^2_{1,1}f(a,b) = 2n(\sigma_x^2 + \overline{x}^2)$ $\quad \partial^2_{2,1}f(a,b) = 2n\overline{x}$ $\quad \partial^2_{1,2}f(a,b) = 2n\overline{x}$ $\quad \partial^2_{2,2}f(a,b) = 2n$

$$H_{(a,b)} - \lambda I_2 = \begin{pmatrix} 2(n\sigma_x^2 + n\overline{x}^2) - \lambda & 2n\overline{x} \\ 2n\overline{x} & 2n - \lambda \end{pmatrix}$$

λ valeur propre de $H_{(a,b)} \Leftrightarrow H_{(a,b)} - \lambda I_2$ non inversible

$\Leftrightarrow \left(2n(\sigma_x^2 + \overline{x}^2) - \lambda\right)(2n - \lambda) - 4n^2\overline{x}^2 = 0$

$\Leftrightarrow \lambda^2 - 2n\lambda - 2n(\sigma_x^2 + \overline{x}^2)\lambda + 4n^2(\sigma_x^2 + \overline{x}^2) - 4n^2\overline{x}^2 = 0$

$\Leftrightarrow \lambda^2 - 2n(\sigma_x^2 + \overline{x}^2 + 1)\lambda + 4n^2\sigma_x^2 = 0$

Le produit des racines vaut $4n^2\sigma_x^2 > 0$ (car pas tous égaux) donc les 2 valeurs propres sont de même signe. De plus la somme des racines vaut $2n(\sigma_x^2 + \overline{x}^2 + 1) > 0$, donc les deux valeurs propres sont strictement positives. Le point critique est un minimum local.