Chapitre 19 : Fonctions à deux variables – Feuille n°1

Exercice 1
1) Déterminer l'ensemble des points (x, y) du plan tels que $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 9$.
2) Déterminer l'ensemble des points (x, y) du plan tels que $x^2 + y^2 < 2$.

Exercice 2
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = x^2y^2 + x^2 + 2xy - 2x$.
1) Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.
2) Déterminer les dérivées partielles premières de f sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3
Soit f la fonction définie sur l'ouvert $U = (\mathbb{R}^*)^2$ par $f(x,y) = 4xy + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$.
1) Montrer que f est de classe C^1 sur U.
2) Déterminer les dérivées partielles premières de f sur U.

Exercice 4
Déterminer les dérivées partielles d'ordre 1 des fonctions :
a) $f(x, y) = x.\ln(y^2 + 1)$ sur $\mathbb{R}^2$ b) $g(x, y) = x.y.\exp(-x^2)$ sur $\mathbb{R}^2$

Exercice 5
Pour les exercices 2, 3 et 4, montrer que les fonctions sont de classe C^2 sur leur ensemble de définition, et déterminer les dérivées partielles secondes.

Exercice 6
Soit f la fonction de l'exercice 2.
1. a) Déterminer les points critiques de f sur $\mathbb{R}^2$.
b) Montrer que f admet un unique extremum local sur $\mathbb{R}^2$.
2. a) Montrer que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) + 2 = (xy + 1)^2 + (x - 1)^2$
b) L'extremum trouvé à la question précédente est-il un extremum global ?

Exercice 7
On admet que $U =]0; +\infty[\times \mathbb{R}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Soit f : $\begin{cases} U \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x;y) \longmapsto x((\ln (x))^2 + y^2) \end{cases}$
1. Montrer que f admet un unique extremum local.
2. Montrer que cet extremum est un extremum global.

Exercice 8
On note f : $\begin{cases} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \longmapsto x^4 + y^4 - (x - y)^2 \end{cases}$.
1. Montrer que (0,0) est un point critique de f.
2. L'étude des dérivées secondes permet-elle de savoir si f admet un extremum local en (0,0) ?
3. a) Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $g(x) = f(x, 0)$ et $h(x) = f(x, x)$.
Déterminer le signe de g(x) et de h(x) en fonction de x.
b) f(0,0) est-il un extremum local ?