Chapitre 19 : Fonctions de deux variables

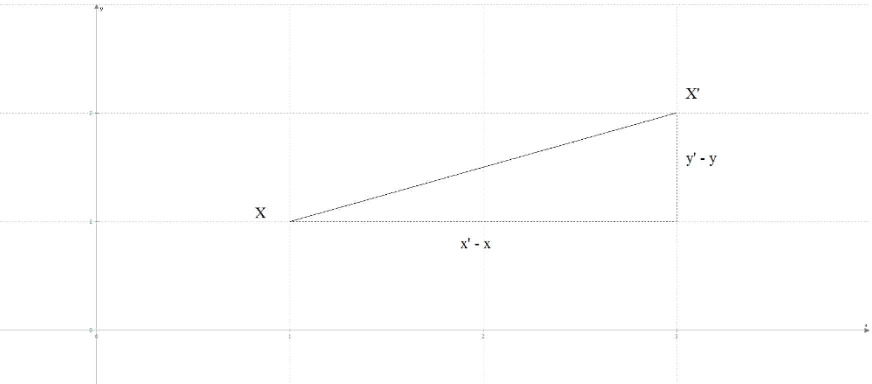
1. Quelques éléments topologiques

Dans ce chapitre, on identifiera souvent le couple (x,y) de $\mathbb{R}^2$ et le point M du plan de coordonnées (x,y).

Définition : Distance euclidienne

Soient $X = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $X' = (x', y')$ deux éléments de $\mathbb{R}^2$
On appelle distance euclidienne de X à X' le réel : $\mathbf{d(X, X') = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2}}$

Interprétation graphique : Si on représente dans le plan les points X de coordonnées (x,y) et X' de coordonnées (x',y') alors :



D'après le théorème de Pythagore,
$XX'^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2$
$XX' = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2}$

Définition :

Soit A $(x_A;y_A)$ un point du plan et R > 0.
_ On appelle **cercle de centre A et de rayon R** l'ensemble des points M du plan tels que : **d(A, M) = R**.
C'est l'ensemble des points M(x ;y) du plan tels que $\mathbf{(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = R^2}$
_ On appelle **boule ouverte de centre A et de rayon R** l'ensemble des points M du plan tels que **d(A, M) < R**.
C'est l'ensemble des points M(x,y) tels que $\mathbf{(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 < R^2}$
_ On appelle **boule fermée de centre A et de rayon R** l'ensemble des points M du plan tels que **d(A, M) ≤ R**.
C'est l'ensemble des points M(x,y) tels que $\mathbf{(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 \leq R^2}$

Ex :
Equation de la boule ouverte de centre (1, -1) et de rayon 2 :

Définition :

Soit E une partie de $\mathbb{R}^2$. On dit que **E est une partie ouvert**e (ou un ouvert) de $\mathbb{R}^2$ lorsque, en chacun de ses points, **il existe une boule ouverte centrée en ce point et incluse dans E**.

Remarques :
_ ∅ et $\mathbb{R}^2$ sont des ouverts
_ les boules ouvertes sont des ouverts de $\mathbb{R}^2$.
_ un produit d'intervalles ouverts est un ouvert (]a;b[×]c;d[est un ouvert).
_ On peut retenir qu’un ouvert est un ensemble "sans le bord". D manière générale, un ensemble défini par une inégalité stricte est très souvent un ouvert.
_ dans l'énoncé d'un sujet, il sera toujours indiqué si l'ensemble considéré est un ouvert.

Remarque :
Soit D un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $(x_0, y_0) \in D$. On appelle **voisinage** de (x_0, y_0) toute partie D' de D qui contient une boule ouverte centrée en (x_0, y_0).

Définition

Soit E une partie de $\mathbb{R}^2$. On dit que **E est un fermé** si $\overline{\mathbf{E}}$ **est un ouvert.**

Remarques :
_ $\emptyset$ et $\mathbb{R}^2$ sont des fermés.
_ les boules fermées sont des fermés de $\mathbb{R}^2$.
_ un produit d'intervalles fermés est un fermé ($[a;b] \times [c;d]$ est un fermé).
_ un fermé est un ensemble "avec le bord"
_ de manière générale, un ensemble défini par une inégalité large est très souvent un fermé.

Définition

Soit E une partie de $\mathbb{R}^2$. On dit que **E est bornée** s'**il existe une boule contenant E**.

Ex :
$[-1;1]^2$ est borné car il est contenu dans la boule de centre 0 et de rayon $\sqrt{2}$.

Remarque : si a, b, c, d sont des réels avec $a < b$ et $c < d$, alors $[a;b] \times [c;d]$ est un ensemble borné.

2. Continuité

2.1 Notion de fonction à deux variables

Définition :

Soit D une partie de $\mathbb{R}^2$. Une fonction f : $\left\{\begin{array}{l} D \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \longmapsto f(x,y) \end{array}\right.$ est appelée fonction à deux variables.

Définition :

Les fonctions $\left\{\begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \longmapsto x \end{array}\right.$ et $\left\{\begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \longmapsto y \end{array}\right.$ sont appelées **fonctions coordonnées**.

Définition :

On appelle **fonction polynomiale** de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ toute combinaison linéaire de fonctions de la forme $(x,y) \longmapsto \mathbf{x^i y^j}$, avec $i \in \mathbb{N}$, et $j \in \mathbb{N}$.

Remarque :
Une fonction polynomiale est donc une somme de produits des fonctions coordonnées.

Rappel :

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in \mathbb{R}$.

On dit que f est continue en x_0 si : $\forall \varepsilon > 0, \exists r > 0, \forall x \in \mathbb{R}, |x - x_0| \leq r \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$.

Définition :

> Soit f une application définie sur $\mathbb{R}^2$. Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.
> On dit que **f est continue en (x_0, y_0)** si :
> $\forall \varepsilon > 0, \exists r > 0, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, d((x, y), (x_0, y_0)) \leq r \Rightarrow |f(x, y) - f(x_0, y_0)| \leq \varepsilon$.

Remarque : Montrer la continuité d'une fonction sur $\mathbb{R}^2$ peut s'avérer très difficile. Nous n'étudierons que des exemples simples.

Propriété :

> Les fonctions coordonnées sont continues sur $\mathbb{R}^2$.

Propriété :

> Soit f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}^2$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
> Si f est continue sur $\mathbb{R}^2$, alors $\boldsymbol{\lambda f}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.
> Si f et g sont continues sur $\mathbb{R}^2$, alors $\mathbf{f + g}$, $\mathbf{f \times g}$, $\mathbf{\dfrac{f}{g}}$ (si g ne s'annule pas) sont continues sur $\mathbb{R}^2$.
> _ Soit $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.
> Si f est continue sur $\mathbb{R}^2$ et h continue sur $\mathbb{R}$, alors $\mathbf{h \circ f}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Ex :

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \longmapsto \exp(-(x^2 + y^2)) \end{cases}$. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Propriété :

> Toute **fonction polynomiale** de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ est **continue sur $\mathbb{R}^2$**.

Ex : Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x;y) \longmapsto x^2y + y^3 - x \end{cases}$. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

3. Représentations graphiques d'une fonction à deux variables

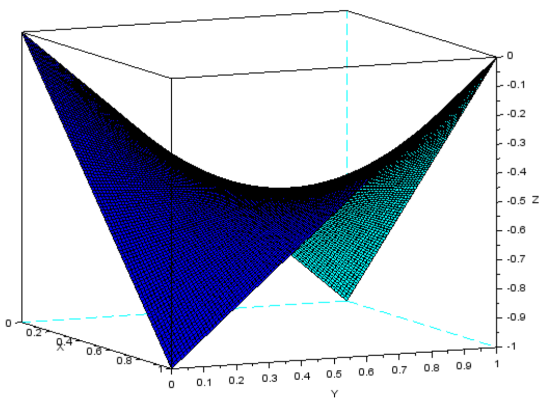
3.1 Surface d'une fonction à deux variables

Rappel : Une fonction réelle $f : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est représentée par une courbe dans le plan : c'est l'ensemble des points M(x, y) tels que $x \in D$ et $y = f(x)$.

Une fonction f à deux variables est représentée par une **surface** dans l'espace.
La surface est l'ensemble des points M(x, y, z) tels que $(x, y) \in D_f$ et $z = f(x, y)$.

Exemple :

La fonction f $\begin{cases} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \longmapsto 2xy - x - y \end{cases}$ sur $[0,1] \times [0,1]$
est représentée par :



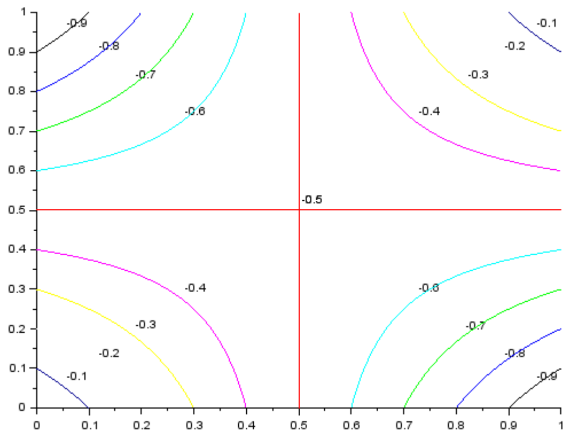
3.2 Ligne de niveau

Soit f une fonction définie sur $D \subset \mathbb{R}^2$.
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit L_λ L'ensemble des points M(x ;y) du plan tels que $f(x,y) = \lambda$. L_λ est appelé ligne de niveau λ de f.

Remarque : C'est l'intersection de la surface avec le plan d'équation $z = \lambda$.

Exemple : carte IGN, carte météo (isotherme, isobare)

Ex : Suite de l'exemple précédent :



4. Calcul différentiel

4.1 Dérivées partielles d'ordre 1

Définition :

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^2$. Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.
_ si la fonction $x \longmapsto f(x, y_0)$ est dérivable en x_0, alors on dit que f admet une **dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à x** en (x_0, y_0). La dérivée est noté $\boldsymbol{\partial_1 f}$ (x_0,y_0) ou $\boldsymbol{\dfrac{\partial f}{\partial x}}$ (x_0,y_0)
_ si la fonction $y \longmapsto f(x_0,y)$ est dérivable en x_0, alors on dit que f admet une **dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à y** en (x_0,y_0). La dérivée est notée $\boldsymbol{\partial_2 f}(x_0, y_0)$ ou $\boldsymbol{\dfrac{\partial f}{\partial y}}(x_0, y_0)$.

Remarques :
_ $\partial_1 f$: on dérive "en considérant y comme une constante".
_ $\partial_2 f$: on dérive "en considérant x comme une constante".
_ les formules pour les dérivées partielles (produit, quotient, ….) sont analogues aux formules de dérivation classique.
_ Attention : ne pas confondre **constante additive et constante multiplicative** : $f + \lambda$ et λf.

Exemple :

Soit f : $\begin{cases} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \longmapsto x^2 - 2xy + \dfrac{2}{3}y^3 \end{cases}$. Déterminer les dérivées partielles d'ordre 1 de f.

Définition :

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^2$.
Si f admet des dérivées partielles d'ordre 1 en tout point de $\mathbb{R}^2$, et si ces dérivées partielles sont continues sur $\mathbb{R}^2$, on dit que **f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$**.

Propriété :

Les fonctions polynomiales sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.
La somme, le produit, le quotient (s'il existe), la composée de fonctions de classe C^1 est de classe C^1.

Propriété :

Toute fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Remarque : Attention, une fonction peut admettre des dérivées partielles sans être continue !

Définition :

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^2$. Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.
Si f admet des dérivées partielles en (x_0, y_0), on appelle gradient de f en (x_0, y_0) le vecteur :

$$\boldsymbol{\nabla(f)(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \partial_1(f)\ (x_0, y_0) \\ \partial_2(f)\ (x_0, y_0) \end{pmatrix}}$$

Exemple : Dans l'exemple précédent, déterminer $\nabla(f)$.

Remarques :
_ "∇" se lit "nabla"
_ graphiquement, le gradient représente la direction de "la variation la plus grande" (dans le sens croissant). Il est "orthogonal" aux lignes de niveau.

4.2 Dérivées partielles d'ordre 2

Définition :

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^2$.
Si f admet des dérivées partielles $\partial_1(f)$ et $\partial 2(f)$ sur $\mathbb{R}^2$, et si ces fonctions admettent elles-mêmes des dérivées partielles sur $\mathbb{R}^2$, on dit que f admet des dérivées partielles d'ordre 2 sur $\mathbb{R}^2$, et on note :
$\boldsymbol{\partial^2_{1,1}(f) = \partial_1(\partial_1(f))}$ $\boldsymbol{\partial^2_{2,1}(f) = \partial_2(\partial_1(f))}$ $\boldsymbol{\partial^2_{1,2}(f) = \partial_1(\partial_2(f))}$ $\boldsymbol{\partial^2_{2,2}(f) = \partial_2(\partial_2(f))}$

Remarque :
$\partial^2_{i,j}(f)$: on dérive d'abord par rapport à la j-ème variable, puis par rapport à la i-ème.

Ex : Avec l'exemple précédent : $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \longmapsto x^2 - 2xy + \dfrac{2}{3}y^3 \end{cases}$
On a trouvé : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\partial_1 f(x,y) = 2x - 2y$ $\partial_2 f(x,y) = -2x + 2y^2$
Déterminer les dérivées partielles d'ordre 2 de f sur $\mathbb{R}^2$.

Définition :

Soit f une fonction définie sur une partie D de $\mathbb{R}^2$.
Si f admet des dérivées partielles d'ordre 2 en tout point de D, et si ces dérivées partielles d'ordre 2 sont continues sur D, on dit que f est **de classe C^2** sur D.

Propriété :

Toute fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.
Les fonctions polynomiales sont de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.
La somme, le produit, le quotient (s'il existe), la composée de fonctions de classe C^2 est de classe C^2.

Théorème de Schwarz :

Soit f une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$. Alors $\boldsymbol{\partial^2_{2,1}(f) = \partial^2_{1,2}(f)}$

Définition : **Matrice hessienne**

Soit f une fonction qui admet des dérivées partielles d'ordre 2 sur $\mathbb{R}^2$. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
La matrice hessienne de f au point (x, y) est la matrice :

$$\boldsymbol{\nabla^2(f)(x,y) = \begin{pmatrix} \partial^2_{1,1}(f)(x,y) & \partial^2_{1,2}(f)(x,y) \\ \partial^2_{2,1}(f)(x,y) & \partial^2_{2,2}(f)(x,y) \end{pmatrix}}$$

Remarque :
Si f est de classe C^2, on sait que $\partial^2_{2,1}(f) = \partial^2_{1,2}(f)$, donc $\nabla^2(f)$ est symétrique.
Donc elle est diagonalisable.

Exemple : Suite de l'exemple précédent
Déterminer la matrice hessienne de f.

5. Extremums d'une fonction à deux variables

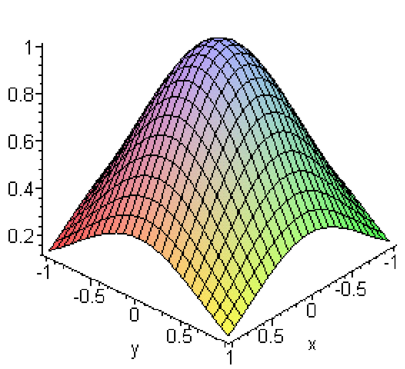
5.1 Définitions et exemples

Définition :

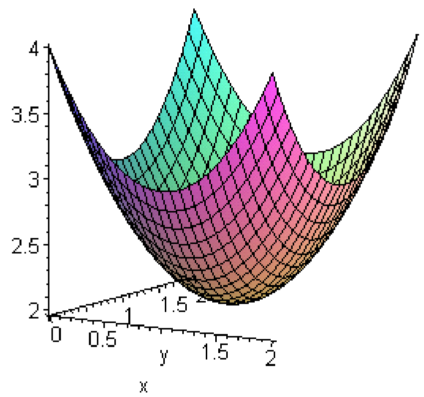
Soit D une partie de $\mathbb{R}^2$ et f D $\longrightarrow$ $\mathbb{R}$. Soit $(x_0, y_0) \in D$.
On dit que f admet un **maximum (global)** en (x_0, y_0) si $\forall (x, y) \in D$, $\boldsymbol{f(x,y) \leq f(x_0, y_0)}$
On dit que f admet un **maximum local** en (x_0, y_0) s'il existe un **voisinage D'** de (x_0, y_0)
tel que : $\boldsymbol{\forall (x, y) \in D', f(x,y) \leq f(x_0, y_0)}$
(définition analogue pour minimum (global) et minimum local)

Exemples graphiques :

$f(x,y) = \exp(-(x^2 + y^2))$ sur $[-1;1]\times[-1;1]$:
fonction qui admet un maximum

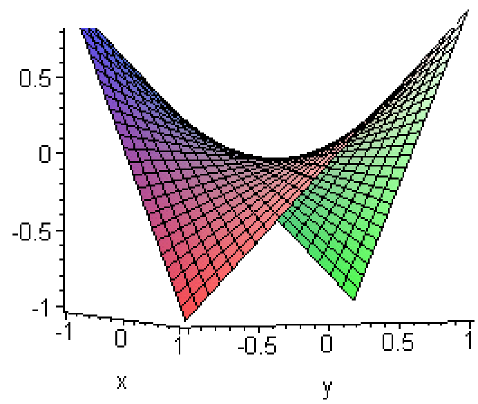


$f(x,y) = (x-1)^2 + (y-1)^2 + 2$ sur $[0;2]\times[0;2]$
fonction qui admet un minimum



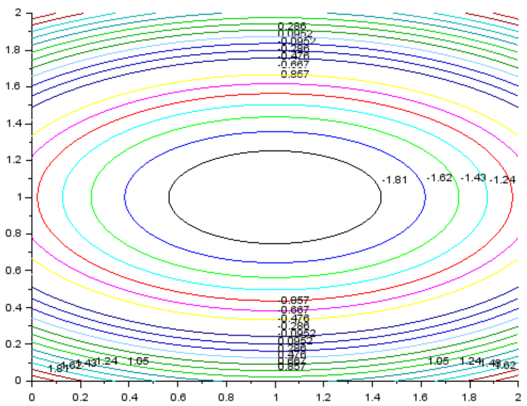
$f(x,y) = xy$ sur $[-1;1] \times [-1;1]$:

Selon la direction prise, le point (0,0)
est un minimum ou un maximum.
Il n'y a pas d'extremum local.
On dit que la surface admet un **point-col** ou **point-selle**.

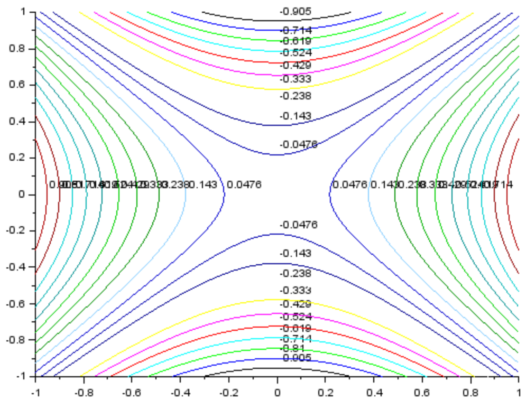


Ligne de niveau autour d'un point

Cas d'un extremum local



Cas d'un point-col



Rappel :
Soit a et b deux réels et f : [a;b] $\longrightarrow \mathbb{R}$.
Si f est continue sur [a;b], alors f admet un minimum et un maximum.

Propriété : Soit D une partie de $\mathbb{R}^2$ et f une fonction définie sur D.

Si D est une partie **fermée et bornée** de $\mathbb{R}^2$, et si f est **continue** sur D, alors f est bornée sur D et admet un **maximum** et un **minimum** sur D.

5.2 Extremums et points critiques

Rappel : Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et dérivable sur I.
Si f admet un extremum local en $x_0 \in I$, alors x_0 est un "bord" de I ou f ' s'annule en x_0.
Si I est un intervalle ouvert, alors x_0 extremum $\Rightarrow f'(x_0) = 0$.
Attention, la réciproque est fausse :
Ex $f(x) = x^3$ sur $\mathbb{R}$: $f'(x) = 3x^2$ donc $f'(0) = 0$, mais 0 n'est pas un extremum local.

Définition :

Soit $\mathcal{O}$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et f une fonction de classe C^1 sur $\mathcal{O}$.
On appelle **point critique de f** tout point $(x_0, y_0) \in \mathcal{O}$ tel que $\begin{cases} \boldsymbol{\partial_1 f\ (x_0, y_0) = 0} \\ \boldsymbol{\partial_2 f\ (x_0, y_0) = 0} \end{cases}$

Remarque : $\begin{cases} \partial_1 f\ (x_0, y_0) = 0 \\ \partial_2 f\ (x_0, y_0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \nabla(f)(x_0, y_0) = 0$

Propriété :

Soit $\mathcal{O}$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et f une fonction de classe C^1 sur $\mathcal{O}$. Soit $(x_0, y_0) \in \mathcal{O}$.
Si f admet un **extremum (local ou global)** en (x_0, y_0), alors (x_0, y_0) est un **point critique** de f.

Remarques :
_ Attention, on verra que (x_0, y_0) **peut être un point critique sans être un extremum**.
_ rappel : un produit est nul lorsqu'un des facteurs (au moins) est nul.

Ex : suite de l'exemple précédent :
On a trouvé : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\partial_1 f(x,y) = 2x - 2y$ $\quad\quad \partial_2 f\ (x,y) = -2x + 2y^2$
Déterminer les points critiques de f.

5.3 Etude des points critiques

Rappels :
_ Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors λ est valeur propre de A si et seulement si $A - \lambda I$ n'est pas inversible.
Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. A n'est pas inversible si et seulement si **ad – bc = 0**.
Donc $A - \lambda I = \begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix}$ est non inversible si et seulement si $(a-\lambda)(d-\lambda) - bc = 0$.
_ deux nombres sont de même signe si et seulement si leur produit est positif.

Propriété :

Soit $\mathbf{P = aX^2 + bX + c}$ un polynôme de $\mathbb{R}_2[X]$ (avec $a \neq 0$).
Soit x_1 et x_2 les racines de P (distinctes ou non). Alors :

$$\mathbf{x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{x_1x_2 = \frac{c}{a}}.$$

Démonstration :
Si P admet x_1 et x_2 comme racines, alors

$$P = a(X - x_1)(X - x_2) = aX^2 - ax_2X - ax_1X + ax_1x_2 = aX^2 + (-ax_1 - ax_2)X + ax_1x_2$$

Or $P = aX^2 + bX + c$, donc par identification des coefficients,

$$\begin{cases} -a(x_1 + x_2) = b \\ ax_1x_2 = c \end{cases} \quad \text{et comme } a \neq 0, \begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ x_1x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$$

Propriété :

Soit $\mathcal{O}$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et f une fonction de classe C^2 sur $\mathcal{O}$.
Soit $(x_0, y_0) \in \mathcal{O}$ un point critique de f. On note $H = \nabla^2(f)(x_0, y_0)$.
_ si les valeurs propres de H sont **strictement positives** alors f admet un **minimum local** en (x_0, y_0).
_ si les valeurs propres de H sont **strictement négatives** alors f admet un **maximum local** en (x_0, y_0).
_ si les valeurs propres de H sont **non nulles et de signes opposés**, alors f n'admet **pas d'extremum local** en (x_0, y_0). On dit que (x_0, y_0) est un **point-col** ou un **point-selle**.
_ si 0 est valeur propre de H, on ne peut pas conclure directement.

Remarques :
_ Une matrice hessienne est toujours symétrique, donc diagonalisable, donc admet toujours deux valeurs propres (distinctes ou non).
_ λ_1, λ_2 non nulles et de même signe $\Leftrightarrow \lambda_1 \lambda_2 > 0$
_ Si f admet un extremum local en (x_0, y_0), pour montrer que cet extremum est global, il faut encore montrer que $\forall (x, y) \in D^2$, $f(x,y) \geq f(x_0, y_0)$ (ou $\leq$)

Ex : suite de l'exemple précédent : f : $\begin{cases} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \longmapsto x^2 - 2xy + \dfrac{2}{3}y^3 \end{cases}$

On a vu que f a deux points critiques : (0,0) et (1,1) et que $\forall\ (x, y) \in \mathbb{R}^2\ \ \nabla^2(f)(x\ ,y) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4y \end{pmatrix}$.

f admet-elle un extremum local ?

Conclusion : Plan d'étude d'une fonction à deux variables

Soit f une fonction définie sur un ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}^2$.

1) Montrer que f est de classe C^2 sur $\mathcal{O}$.

2) Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 ($\partial_1 f$ et $\partial_2 f$).

3) Chercher les points critiques $\left(\text{solutions du système } \begin{cases} \partial_1 f(x, y) = 0 \\ \partial_2 f(x, y) = 0 \end{cases}\right)$

4) Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 ($\partial^2_{1,1} f$, $\partial^2_{2,1} f$, $\partial^2_{1,2} f$ et $\partial^2_{2,2} f$)
(vérifier la cohérence avec le théorème de Schwarz)

5) Pour chaque point critique (x_0, y_0) :

a) Déterminer la matrice hessienne $H = \begin{pmatrix} \partial^2_{1,1} f(x_0, y_0) & \partial^2_{1,2} f(x_0, y_0) \\ \partial^2_{2,1} f(x_0, y_0) & \partial^2_{2,2} f(x_0, y_0) \end{pmatrix}$

b) Déterminer les valeurs propres de H (ou au moins leurs signes à l'aide de somme et produit de racines)

c) Conclure :

$$\begin{cases} \text{si } \lambda_1 > 0 \text{ et } \lambda_2 > 0 : \text{minimum local} \\ \text{si } \lambda_1 < 0 \text{ et } \lambda_2 < 0 : \text{maximum local} \\ \text{si } \lambda_1 \lambda_2 < 0 : \text{point-col} \\ \text{si 0 est valeur propre : on ne peut pas conclure} \end{cases}$$

d) Si extremum local, étudier s'il s'agit d'un extremum global.

C'est-à-dire : $\begin{cases} \forall (x, y) \in \mathcal{O},\ f(x, y) \geq f(x_0, y_0) \quad \text{(minimum global)} \\ \text{ou} \\ \forall (x, y) \in \mathcal{O},\ f(x, y) \leq f(x_0, y_0) \quad \text{(maximum global)} \end{cases}$