Chapitre 2 : Les fonctions – Correction exercices niveau 2

Exercice 1

1) $\forall x \geq 0$, $f(x) \leq f(0)$ donc $f(x) - x \leq f(0) - x$

$\lim_{x \to +\infty} f(0) - x = -\infty$, donc par théorème de comparaison, $\lim_{x \to +\infty} f(x) - x = -\infty$.

Ou : f est décroissante, donc soit $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$, soit $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}$. Dans les deux cas, $\lim_{x \to +\infty} f(x) - x = -\infty$

2) Posons $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - x$.

_ g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ comme somme d'une fonction décroissante et d'une fonction strictement décroissante sur $\mathbb{R}$

_ g est continue sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions continues.

_ on a déjà montré que $\lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$.

_ $\forall x \leq 0$, $f(x) \geq f(0)$ donc $g(x) \geq f(0) - x$, donc par comparaison, $\lim_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$.

Donc g réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-\infty; +\infty[$, donc l'équation $g(x) = 0$ ($\Leftrightarrow f(x) = x$) admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2

De même, en posant : $g(x) = f(x) - x$, g est continue sur $[0;1]$

$g(0) = f(0) \geq 0$ $g(1) = f(1) - 1 \leq 0$

Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet au moins une solution sur l'intervalle $[0;1]$, donc f admet au moins un point fixe.

Exercice 3

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(-x)$ La fonction $x \longmapsto f(-x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables. En dérivant l'égalité, on obtient : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -f'(-x)$

Donc f ' est impaire.

Le deuxième cas est analogue.

La fonction $f(x) = x^2$ est paire, et a pour primitive $F(x) = \frac{1}{3}x^3$ qui est impaire, mais aussi $G(x) = \frac{1}{3}x^3 + 1$, qui ne l'est pas. (ou plus simplement $f(x) = x + 1$ n'est pas impaire, mais f ' est paire)

Exercice 4

Soit f la fonction définie par $f(t) = \ln(\ln(t))$ sur $[x;x+1]$

f est dérivable sur $[x, x + 1]$ et $\forall t \in [x, x+1]$ $f'(t) = \dfrac{\frac{1}{t}}{\ln(t)} = \dfrac{1}{t\ln(t)}$

De même f ' est dérivable et $\forall t \in [x, x+1]$ $f''(t) = -\dfrac{\ln(t) + 1}{t^2\ln(t)^2}$

$\forall t \in [x, x+1]$ $t \geq 1$ donc $\ln(t) \geq 0$ $f''(t) < 0$ f ' décroissante.

$\forall t \in [x;x+1]$ $x \leq t \leq x + 1$ donc $f'(x+1) \leq f'(t) \leq f'(x)$ donc $\dfrac{1}{t\ln(t)} \leq \dfrac{1}{x\ln(x)}$

Donc d'après l'IAF : $f(x + 1) - f(x) \leq \dfrac{1}{x\ln(x)}(x + 1 - x)$ $\ln(\ln(x + 1)) - \ln(\ln(x)) \leq \dfrac{1}{x\ln(x)}$.

Exercice 5

1. g est continue sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$ comme produit et composée de fonctions continues.

En 0 : $\lim\limits_{x \to 0,\, x>0} g(x) = \lim\limits_{x \to 0,\, x>0} x.\ln(x) = 0$ par croissances comparées

$\lim\limits_{x \to 0,\, x<0} g(x) = \lim\limits_{x \to 0,\, x<0} x.\ln(-x) = \lim\limits_{x \to 0,\, x<0} -(-x)\ln(-x)$

$\lim\limits_{x \to 0,\, x<0} -x = 0^+$ et $\lim\limits_{X \to 0,\, X<0} X.\ln(X) = 0$ donc $\lim\limits_{x \to 0,\, x<0} g(x) = -0 = 0$

De plus, $g(0) = 0$ donc g est continue en 0, donc sur $\mathbb{R}$.

2. h est de classe C^1 sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$ comme produit et composée de fonctions de classe C^1.

$\forall x > 0$, $h(x) = x^2\ln(x)$ donc $h'(x) = 2x\ln(x) + x^2 . \dfrac{1}{x} = 2x\ln(x) + x$

$\forall x < 0$, $h(x) = x^2\ln(-x)$ donc $h'(x) = 2x\ln(-x) + x^2.\dfrac{-1}{-x} = 2x\ln(-x) + x$

Donc $\forall x \neq 0$, $h'(x) = 2g(x) + x$

En 0 : $\dfrac{h(x)-h(0)}{x-0} = \dfrac{xg(x)}{x} = g(x)$ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{h(x)-h(0)}{x-0} = \lim\limits_{x \to 0} g(x) = 0$ d'après la question 1.

Donc h est dérivable en 0 et $h'(0) = 0$.

De plus $\lim\limits_{x \to 0} h'(x) = \lim\limits_{x \to 0} (2g(x) + x) = 0$ donc h' est continue en 0.

Donc h' est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

3. h est de classe C^2 sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$ comme produit et composée de fonctions de classe C^2.

Si $x \neq 0$, $\dfrac{h'(x)-h'(0)}{x-0} = \dfrac{2g(x)+x}{x} = 2\ln(|x|) + 1$ donc $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{h'(x)-h'(0)}{x-0} = -\infty$.

Donc h' n'est pas dérivable en 0.