Chapitre 2 : Les fonctions

1. Limite d'une fonction

1.1 Rappels

4 formes indéterminées : "$+\infty$" + "$-\infty$"   "$0 \times \infty$"   "$\frac{0}{0}$"   "$\frac{\infty}{\infty}$"

Propriété :

$\lim\limits_{x \to +\infty} \mathbf{e^x = +\infty}$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathbf{\ln(x) = +\infty}$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathbf{e^x = 0}$ $\lim\limits_{x \to 0} \mathbf{\ln(x) = -\infty}$

$\lim\limits_{x \to 0} \mathbf{\frac{e^x - 1}{x} = 1}$ $\lim\limits_{x \to 0} \mathbf{\frac{\ln(1 + x)}{x} = 1}$

Propriété : (Croissances comparées)

si $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathbf{\frac{e^{\beta x}}{x^\alpha} = +\infty}$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathbf{\frac{\ln(x)^\beta}{x^\alpha} = 0}$

(si $\alpha \in \mathbb{N}$) $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathbf{x^\alpha e^{\beta x} = 0}$ (si $\beta \in \mathbb{N}$) $\lim\limits_{x \to 0} \mathbf{x^\alpha \ln(x)^\beta = 0}$.

Remarques : on a donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^\alpha}{e^{\beta x}} = 0$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathbf{x^\alpha e^{-\beta x} = 0}$.

On a également $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha e^{-\beta x^2} = 0$ si $\alpha > 0$ et $\beta > 0$.

Propriété :

Soit f une fonction définie sur $[a; b[$ (b fini ou $+\infty$).
Si f est **croissante** et **majorée** sur $[a;b[$, alors f admet une **limite finie en b**.
Si f est **croissante** sur $[a;b[$ et n'admet **pas de limite finie en b**, alors $\lim\limits_{x \to b} \mathbf{f(x) = +\infty}$.

(Propriété analogue si f décroissante)

1.2 Asymptotes

Définition :

1) Soit f une fonction définie sur un voisinage de $\mathbf{x_0 \in \mathbb{R}}$.
Si $\lim\limits_{x \to x_0} \mathbf{f(x) = \infty}$, alors on dit que la droite d'équation $\mathbf{x = x_0}$ est **asymptote verticale** à la courbe de f.
2) Soit f une fonction définie sur un voisinage de $+\infty$.
Si $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathbf{f(x) = y_0}$**, avec** $\mathbf{y_0 \in \mathbb{R}}$, on dit que la droite d'équation $\mathbf{y = y_0}$ est **asymptote horizontale** à C_f.

Remarque :

Si f n'est pas définie en $x_0 \in \mathbb{R}$ et si $\lim\limits_{x \to x_0} \mathbf{f(x) = y_0 \in \mathbb{R}}$, alors on peut **prolonger f par continuité en** $\mathbf{x_0}$**, en posant** $\mathbf{f(x_0) = y_0}$.

Exemple :

Soit f définie sur $]0; +\infty[$ par : $\forall x > 0$, $f(x) = \frac{\ln(1 + x)}{x}$. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0.

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1$ (cours), donc on peut prolonger f par continuité en 0, en posant $f(0) = 1$.

2. Continuité d'une fonction et applications

2.1 Fonction continue en un point, sur un intervalle

Définitions :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
_ soit $x_0 \in I$. On dit que f est **continue en x_0** si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.
($\Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0,\, x < x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0,\, x > x_0} f(x) = f(x_0)$)
_ Si f est continue en tout point x_0 de I, alors on dit que f est continue sur I.

Ex : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} x^2 \text{ si } x \geq 1 \\ 2x - 1 \text{ si } x < 1 \end{cases}$
f est-elle continue en 1 ?

$\lim\limits_{x \to 1,\, x \geq 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1,\, x \geq 1} x^2 = 1$ $\quad \lim\limits_{x \to 1,\, x < 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1,\, x < 1} 2x - 1 = 1$ donc f est continue en 1.

Propriété :

Les fonctions **constantes**, **affines**, **polynomiales** sont continues sur $\mathbb{R}$.
La fonction **exp** est continue sur $\mathbb{R}$, la fonction **ln** est continue sur $]0; +\infty[$.
La fonction $\mathbf{x} \longmapsto \sqrt{\mathbf{x}}$ est continue sur $[0; +\infty[$.
La fonction **valeur absolue** est continue sur $\mathbb{R}$.

Propriété :

La **somme**, la **différence**, le **produit**, le **quotient** (s'il existe), la **composée** (si elle existe) de fonctions continues est continue.

Remarque : Pour une fonction définie "par morceaux", il faut étudier :
_ les **intervalles OUVERTS** aux points de "raccordement"
_ à part, les points de "raccordement"

Ex : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} x\ln(x) \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x \leq 0 \end{cases}$
Etudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.
_ f est continue sur $]-\infty;0[$ car fonction nulle et sur $]0; +\infty[$ (produit de fonctions continues).
_ en 0 : $\lim\limits_{x \to 0,\, x>0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0,\, x>0} x.\ln(x) = 0$ (croissances comparées)
$\lim\limits_{x \to 0,\, x \leq 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0,\, x \leq 0} 0 = 0$ donc f est continue en 0.
Donc f est continue sur $\mathbb{R}$.

2.2 Bijection

Rappels :
_ Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Si $f' \geq 0$ sur I, f ne s'annulant qu'en un nombre fini de points, alors f est strictement croissante sur I.
_ Si f est continue et strictement croissante sur I = [a;b], alors f([a,b]) = [f(a), f(b)].
(si I =]a;b[, alors f(]a;b[) = $]\lim_{x \to a} f(x); \lim_{x \to b} f(x)[$)
(si f est décroissante, f([a, b]) = [f(b), f(a)]).

Théorème de la bijection ($1^{ère}$ version) :

> Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I.
> Alors f réalise une bijection de I sur f(I) et admet donc une application réciproque f^{-1} de f(I) sur I.
> De plus, f^{-1} est continue sur f(I), strictement monotone sur f(I), de même sens de variation que f.
> La courbe de f^{-1} est l'image de la courbe de f par la symétrique d'axe la droite d'équation y = x.

Remarques : _ on a : $\forall x \in I, \forall y \in f(I), f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$.
_ $\lim_{x \to x0} f(x) = y_0 \Leftrightarrow \lim_{y \to y0} f^{-1}(y) = x_0$ (x_0, y_0 finis ou infinis).

Théorème de la bijection ($2^{ème}$ version)

> Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I.
> Alors pour tout $\lambda \in f(I)$, l'équation $f(x) = \lambda$ admet une unique solution α sur I.

Remarques :
_ attention à bien vérifier que $\lambda \in f(I)$.
_ λ doit être une constante !
_ pour montrer que f admet un point fixe (f(x) = x), on ne peut pas utiliser le théorème de la bijection directement : il faut poser g(x) = f(x) – x et étudier l'équation g(x) = 0.
_ pour comparer α avec un réel, il faut comparer leurs images et utiliser le sens de variation de f.
_ Cas des suites implicites : voir chapitre sur les suites

Ex : Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par : $f(x) = e^x - x$.
Montrer qu'il existe un unique réel $\alpha \geq 0$ tel que $f(\alpha) = 3$. Montrer que $\alpha < 2$ ($e^2 \approx 7{,}38$)

f est dérivable sur $[0; +\infty[$ et $\forall x \geq 0$, $f'(x) = e^x - 1$ $\quad e^x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 0$
$f(x) \sim_{+\infty} e^x$ donc $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

x	0		$+\infty$
f (x)	0	+	
f '(x)	1	$\nearrow$	$+\infty$

_ f est continue et strictement croissante sur $[0; +\infty[$ et $3 \in [1; +\infty[$, donc l'équation f(x) = 3 admet une unique solution $\alpha \in [0; +\infty[$.
_ $f(\alpha) = 3$ $\quad f(2) = e^2 - 2 \approx 5{,}38$ donc $f(\alpha) < f(2)$ f strictement croissante donc $\alpha < 2$.

3. Dérivée d'une fonction et applications

3.1 Dérivée en un point, tangente

Rappel : Tracé d'une droite passant par $A(x_A, y_A)$ et de pente m.
_ on place le point A
_ en partant de A, "quand on avance de 1, on monte de m" : on trouve un deuxième point
_ on trace la droite

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $x_0 \in I$.
Si $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ admet une **limite finie en x_0**, on dit que f est dérivable en x_0 et dans ce cas, on appelle dérivée de f en x_0 le nombre : $\mathbf{f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x0\ (x \neq x_0)} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}$.

Remarques :
_ on a aussi $f'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ (si existence)

Propriété :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $x_0 \in I$.
Si f est **dérivable** en x_0 alors f est **continue** en x_0.

Attention, le contraire est faux :
_ la fonction racine carrée est continue en 0, mais n'est pas dérivable en 0.
_ la fonction valeur absolue est continue en 0, mais n'est pas dérivable en 0.

Définition – Propriété :

_ Si f est dérivable en x_0, alors la droite passant par $A(x_0, f(x_0))$ et de coefficient directeur $f'(x_0)$ est la tangente à C_f en A.
Son équation est alors : $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.
_ Si $\lim\limits_{x \to x0\ (x \neq x_0)} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \infty$, on dit que C_f admet une tangente verticale en A.

A retenir : **Pente de la tangente en x_0 = $f'(x_0)$**

Remarques :
_ $f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow C_f$ admet une tangente horizontale au point d'abscisse x_0. (repérer les points dans le tableau de signes de f ')
_ avant de tracer une courbe, il faut tracer les tangentes aux points particuliers (double flèche)
_ attention à tracer une courbe tangente à ses tangentes ! (pas d'angle entre la tangente et la courbe).

Remarque : **Fonction dérivable à gauche, à droite :**
Soit f une fonction définie sur un intervalle I, et x_0 un élément de I, qui n'est pas une borne de I.
_ si $\lim\limits_{x \to x0,\ x < x0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = L \in \mathbb{R}$, on dit que f est dérivable à gauche en x_0, et on note $f_g'(x_0)$ cette limite.
Dans ce cas, on dit que C_f admet une demi-tangente à gauche en x_0.
_ la définition est analogue à droite
_ f est dérivable en x_0 si elle est dérivable à gauche et à droite, et si $f_g'(x_0) = f_d'(x_0)$.

Ex : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} x.\ln(x) \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x \leq 0 \end{cases}$.

f est-elle dérivable en 0 ? C_f admet-elle une tangente en 0 ?

$$\lim_{x \to 0,\, x > 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0,\, x > 0} \frac{x\ln(x)}{x} = \lim_{x \to 0,\, x > 0} \ln(x) = -\infty$$

f n'est dérivable à droite. C_f admet une demi-tangente verticale.

$$\lim_{x \to 0,\, x < 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0,\, x < 0} 0 = 0.$$

f est dérivable à gauche. C_f admet une demi-tangente horizontale.

3.2 Dérivée sur un intervalle

Propriété :

La fonction f définie par :	est dérivable sur :	Sa dérivée vaut :
$f(x) = \mathbf{x^{\alpha}}$	selon α	$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$
$f(x) = \mathbf{\frac{1}{x}}$ (cas particulier avec $\alpha = -1$)	$]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
$f(x) = \mathbf{\sqrt{x}}$ (cas particulier avec $\alpha = 1/2$)	$]0;+\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x) = \mathbf{e^x}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = e^x$
$f(x) = \mathbf{\ln(x)}$	$]0;+\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{x}$

Propriété :

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I, et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors :

$u + v$, λu, uv, u^2, $\frac{1}{v}$ (si v ne s'annule pas), $\frac{u}{v}$ (si v ne s'annule pas) sont dérivables sur I et :

$\mathbf{(u + v)' = u' + v'}$ $\mathbf{(\lambda u)' = \lambda u'}$ $\mathbf{(uv)' = u'v + uv'}$ $\mathbf{(u^2)' = 2uu'}$

$\mathbf{\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}}$ $\mathbf{\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}}$

Autrement dit, la somme, le produit, le quotient (si le dénominateur ne s'annule pas) de fonctions dérivables est dérivable.

Propriété :

Soit u une fonction définie sur un intervalle I et v une fonction définie sur un intervalle J tel que $u(I) \subset J$.
Si u est dérivable sur I et v dérivable sur J, alors **$f = v \circ u$ est dérivable sur I**, et :
$\forall x \in I$, $\mathbf{f'(x) = v'(u(x)) \times u'(x)}$.

(La composée de fonctions dérivables est dérivable)

Remarque :
En particulier, si u est une fonction dérivable sur un intervalle I, les fonctions e^u, $\ln(u)$ (si $\forall x \in I, u(x) > 0$), u^{α} ($\alpha \in \mathbb{R}$, domaine de validité en fonction de α), $\sqrt{u}$ (si $\forall x \in I, u(x) > 0$) sont dérivables et :

$\mathbf{(e^u)' = u'e^u}$ $\mathbf{(\ln(u))' = \frac{u'}{u}}$ $\mathbf{(u^{\alpha})' = \alpha\, u^{\alpha-1} u'}$ $\mathbf{(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}}$

Remarque : La dérivée de la fonction réciproque n'est plus au programme

3.3 Inégalité des accroissements finis

Théorème : (IAF) 1ère version

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
S'il existe deux réels m et M tels que $\forall$ **x $\in$ I, m $\leq$ f '(x) $\leq$ M**,
alors $\forall$ (a,b) $\in$ I^2, tells que **a $\leq$ b**,

$$\mathbf{m(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a)}.$$

Théorème (IAF) 2ème version

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
S'il existe un réel K tel que $\forall$ **x $\in$ I,** $|\mathbf{f'(x)}| \leq \mathbf{K}$, alors pour tous a, b $\in$ I,

$$|\mathbf{f(b) - f(a)}| \leq \mathbf{K}\,|\mathbf{b - a}|$$

Remarques :
_ attention, dans la version "sans valeurs absolues", a et b doivent être dans l'ordre croissant.
_ si on a seulement $f'(x) \leq M$ $\forall x \in I$, on a seulement : $f(b) - f(a) \leq M(b - a)$ (idem avec m)
_ Application aux suites récurrentes : Voir chapitre sur les suites
_ $|f'(x)| \leq K \Leftrightarrow -K \leq f'(x) \leq K$
_ pour montrer une inégalité sur f ', il faut souvent étudier les variations de f ''.

Exemple : Montrer que $\forall x \in]0 ; +\infty[$ $\dfrac{1}{x+1} \leq \ln(x + 1) - \ln(x) \leq \dfrac{1}{x}$

Soit f(t) = ln(t) sur [x ;x+1]. Sur [x :x+1], f est dérivable et $f'(t) = \dfrac{1}{t}$

$x \leq t \leq x + 1$ $\quad \dfrac{1}{x+1} \leq \dfrac{1}{t} \leq \dfrac{1}{x}$ $\quad \dfrac{1}{x+1} \leq f'(t) \leq \dfrac{1}{x}$.

D'après l'IAF, $\dfrac{1}{x+1}(x + 1 - x) \leq f(x + 1) - f(x) \leq \dfrac{1}{x}(x + 1 - x)$ $\quad \dfrac{1}{x+1} \leq \ln(x + 1) - \ln(x) \leq \dfrac{1}{x}$.

3.4 Fonctions C^1, C^2

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
On dit que f est **de classe C^1 sur I** si **f est dérivable sur I et si f ' est continue sur I**.
On dit que f est de **classe C^2** sur I si f est 2 fois dérivable sur I et si f '' est continue sur I.

Remarque : Une fonction de classe C^2 sur un intervalle I est aussi de classe C^1 sur I.

Propriétés :

Les fonctions constantes, affines, polynômes, exp sont de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.
Les fonctions racines carrées et ln sont de classe C^2 sur $]0 ; +\infty[$.
Soit p = 1 ou 2. La somme, le produit, le quotient (s'il existe), la composée (si elle existe) de fonctions de classe C^p est de classe C^p.

Rappel :
Si $p \in \mathbb{N}^*$ et si f est une fonction p fois dérivable sur un intervalle I, on note $f^{(p)}$ sa dérivée à l'ordre p.

3.5 Fonctions convexes

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que f est **convexe sur I** si
$\forall (x_1, x_2) \in I^2$, $\forall (t_1, t_2) \in [0;1]^2$ tels que $t_1 + t_2 = 1$,

$$\mathbf{f(t_1x_1 + t_2x_2) \leq t_1 f(x_1) + t_2f(x_2)}$$

Remarques :

_ La définition peut aussi s'écrire :
$\forall (x_1, x_2) \in I^2$, $\forall t \in [0;1]$, $f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$
_ graphiquement : f est convexe si et seulement si sa courbe est **en-dessous de chacune de ses cordes**.
_ f est **concave sur I** si :
$\forall (x_1, x_2) \in I^2$, $\forall (t_1, t_2) \in [0;1]^2$ tels que $t_1 + t_2 = 1$, $\mathbf{f(t_1x_1 + t_2x_2) \geq t_1 f(x_1) + t_2f(x_2)}$

Propriété :

Soit f une fonction **dérivable** sur un intervalle I, et C_f sa courbe représentative.
f est **convexe** sur I si **C_f est au-dessus de chacune de ses tangentes**.
___ concave ____________ en-dessous _______________________.

Propriété :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
Si f est de classe C^1 sur I : **f est convexe sur I ⇔ f ' est croissante sur I**
Si f est de classe C^2 sur I : **f est convexe sur I ⇔ f " est positive sur I.**

Définition :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle]a, b[et $x_0 \in$]a ;b[.
Le point $A(x_0, f(x_0))$ est un point d'inflexion si la fonction **change de convexité en x_0**
(⇔ la courbe "traverse" la tangente en A)

Propriété :

Si f est de classe C^2 sur]a ;b[, alors $A(x_0, f(x_0))$ est un point d'inflexion si et seulement si
f " s'annule en x_0 en changeant de signe.

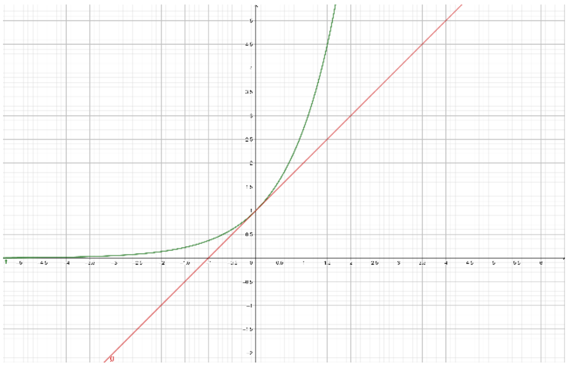
Application très classique : (A savoir démontrer)

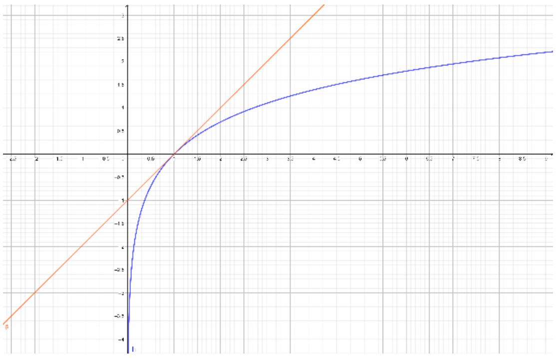
Montrer que :

$\forall\ x \in \mathbb{R},\ e^x \geq 1 + x$ et $\forall\ x > 0,\ \ln(x) \leq x - 1$.

Démonstration :
On sait que la fonction exp est convexe sur $\mathbb{R}$. Donc la courbe est au-dessus de ses tangentes, en particulier en 0.
Or $f(0) = 1$ $f'(x) = e^x$ donc $f'(0) = 1$.
Equation de la tangente : $y = f'(0)(x - 0) + f(0) = x + 1$
Donc $\forall\ x \in \mathbb{R},\ e^x \geq x + 1$.

De même, ln est concave sur $]0; +\infty[$, donc la courbe est en-dessous de la tangente en 1.
$f(1) = 0$ $f'(x) = \dfrac{1}{x}$ $f'(1) = 1$ Tangente : $y = f'(1)(x - 1) + f(1) = x - 1$
Donc $\forall x > 0,\ \ln(x) \leq x - 1$.
Avec $y = x - 1$ ($\Leftrightarrow x = y + 1$), on trouve aussi : $\forall\ y > -1,\ \ln(1 + y) \leq y$.





Conclusion :

Pour tracer la courbe d'une fonction :
_ choisir un repère bien adapté (échelle et position des axes)
_ placer les points particuliers, avec les tangentes (notamment tangentes horizontales)
_ placer les asymptotes
_ tracer la courbe en tenant compte des variations, symétries, tangentes, limites et asymptotes, convexités, …

Exemple :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 + 1$.

1) Etudier les variations de f et les limites de f.
2) Etudier la convexité de f. (En précisant le point d'inflexion et la pente de la tangente en ce point).
3) Tracer la courbe de f. (Unité : 6 carreaux en abscisses et en ordonnées).

1) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = x^2 - 2x = x(x-2)$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	–	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	1	↘	$-1/3$	↗	$+\infty$

2 tangentes horizontales pour $x = 0$ et $x = 2$

$f(0) = 1 \quad f(2) = \frac{8}{3} - 4 + 1 = -\frac{1}{3}$

$\frac{x^3}{3} - x^2 + 1 \sim_{+/-\infty} \frac{x^3}{3}$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

2) f ' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = 2x - 2 = 2(x-1)$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f''(x)$		–	0	+	
$f(x)$		concave		convexe	

Un point d'inflexion, d'abscisse 1 et d'ordonnée $f(1) = \frac{1}{3}$.

Pente de la tangente : $f'(1) = -1$