Chapitre 2 : Les fonctions

1. Limite d'une fonction

1.1 Rappels

4 formes indéterminées :

Propriété :

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ $\lim\limits_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$

Propriété : (Croissances comparées)

si $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{\beta x}}{x^{\alpha}} = +\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)^{\beta}}{x^{\alpha}} = 0$

(si $\alpha \in \mathbb{N}$) $\lim\limits_{x \to -\infty} x^{\alpha}e^{\beta x} = 0$ (si $\beta \in \mathbb{N}$) $\lim\limits_{x \to 0} x^{\alpha}\ln(x)^{\beta} = 0$.

Remarques : Si $\alpha > 0$ et $\beta > 0$, on a donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^{\alpha}}{e^{\beta x}} = 0$ $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{\alpha}e^{-\beta x} = 0$.

On a également $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{\alpha}\exp(-\beta x^2) = 0$.

Propriété :

Soit f une fonction définie sur $[a; b[$ (b fini ou $+\infty$).
Si f est **croissante** et **majorée** sur $[a;b[$, alors f admet une **limite finie en b**.
Si f est **croissante** sur $[a;b[$ et n'admet **pas de limite finie en b**, alors $\lim\limits_{x \to b} f(x) = +\infty$.

(Propriété analogue si f décroissante)

1.2 Asymptotes

Définition :

1) Soit f une fonction définie sur un voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$.
Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$, alors on dit que la droite d'équation $x = x_0$ est **asymptote verticale** à la courbe de f.
2) Soit f une fonction définie sur un voisinage de $+\infty$.
Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = y_0$, **avec** $y_0 \in \mathbb{R}$, on dit que la droite d'équation $y = y_0$ est **asymptote horizontale** à C_f.

Remarque :
Si f n'est pas définie en $x_0 \in \mathbb{R}$ et si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = y_0 \in \mathbb{R}$, alors on peut **prolonger f par continuité en x_0, en posant $f(x_0) = y_0$**.

Exemple :
Soit f définie sur $]0; +\infty[$ par : $\forall\, x > 0$, $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x}$. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0.

2. Continuité d'une fonction et applications

2.1 Fonction continue en un point, sur un intervalle

Définitions :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
_ soit $x_0 \in I$. On dit que f est **continue en x_0** si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.
($\Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0,\, x < x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0,\, x > x_0} f(x) = f(x_0)$)
_ Si f est continue en tout point x_0 de I, alors on dit que f est continue sur I.

Ex : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} x^2 \text{ si } x \geq 1 \\ 2x - 1 \text{ si } x < 1 \end{cases}$
f est-elle continue en 1 ?

Propriété :

Les fonctions **constantes**, **affines**, **polynomiales** sont continues sur $\mathbb{R}$.
La fonction **exp** est continue sur $\mathbb{R}$, la fonction **ln** est continue sur $]0; +\infty[$.
La fonction $\mathbf{x} \longmapsto \sqrt{\mathbf{x}}$ est continue sur $[0; +\infty[$.
La fonction **valeur absolue** est continue sur $\mathbb{R}$.

Propriété :

La **somme**, la **différence**, le **produit**, le **quotient** (s'il existe), la **composée** (si elle existe) de fonctions continues est continue.

Remarque : Pour une fonction définie "par morceaux", il faut étudier :
_ les **intervalles OUVERTS** aux points de "raccordement"
_ à part, les points de "raccordement"

Ex : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} x.\ln(x) \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x \leq 0 \end{cases}$
Etudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.

2.2 Bijection

Rappels :
_ Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Si f ' ≥ 0 sur I, f ne s'annulant qu'en un nombre fini de points, alors f est strictement croissante sur I.
_ Si f est continue et strictement croissante sur I = [a;b], alors f([a,b]) = [f(a), f(b)].
(si I =]a;b[, alors f(]a;b[) = $]\lim_{x \to a} f(x); \lim_{x \to b} f(x)[$)
(si f est décroissante, f([a, b]) = [f(b), f(a)]).

Théorème de la bijection (1ère version) :

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I.
Alors f réalise une bijection de I sur f(I) et admet donc une application réciproque f^{-1} de f(I) sur I.
De plus, f^{-1} est continue sur f(I), strictement monotone sur f(I), de même sens de variation que f.
La courbe de f^{-1} est l'image de la courbe de f par la symétrique d'axe la droite d'équation y = x.

Remarques :
_ on a : $\forall x \in I, \forall y \in f(I), f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$.
_ $\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0 \Leftrightarrow \lim_{y \to y_0} f^{-1}(y) = x_0$ (x_0, y_0 finis ou infinis).

Théorème de la bijection (2ème version)

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I.
Alors pour tout $\lambda \in f(I)$, l'équation $f(x) = \lambda$ admet une unique solution α sur I.

Remarques :
_ attention à bien vérifier que $\lambda \in f(I)$.
_ λ doit être une constante !
_ pour montrer que f admet un point fixe (f(x) = x), on ne peut pas utiliser le théorème de la bijection directement : il faut poser g(x) = f(x) – x et étudier l'équation g(x) = 0.
_ pour comparer α avec un réel, il faut comparer leurs images et utiliser le sens de variation de f.
_ Cas des suites implicites : voir chapitre sur les suites

Ex : Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par : $f(x) = e^x - x$.
Montrer qu'il existe un unique réel $\alpha \geq 0$ tel que $f(\alpha) = 3$. Montrer que $\alpha < 2$ ($e^2 \approx 7,38$)

3. Dérivée d'une fonction et applications

3.1 Dérivée en un point, tangente

Rappel : Tracé d'une droite passant par $A(x_A, y_A)$ et de pente m.
_ on place le point A
_ en partant de A, "quand on avance de 1, on monte de m" : on trouve un deuxième point
_ on trace la droite

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $x_0 \in I$.
Si $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ admet une **limite finie en x_0**, on dit que f est dérivable en x_0 et dans ce cas, on appelle dérivée de f en x_0 le nombre : $\mathbf{f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x0\ (x \neq x_0)} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}$.

Remarques :
_ on a aussi $f'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ (si existence)

Propriété :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $x_0 \in I$.
Si f est **dérivable** en x_0 alors f est **continue** en x_0.

Attention, le contraire est faux :
_ la fonction racine carrée est continue en 0, mais n'est pas dérivable en 0.
_ la fonction valeur absolue est continue en 0, mais n'est pas dérivable en 0.

Définition – Propriété :

_ Si f est dérivable en x_0, alors la droite passant par $A(x_0, f(x_0))$ et de coefficient directeur $f'(x_0)$ est la tangente à C_f en A.
Son équation est alors : $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.
_ Si $\lim\limits_{x \to x0\ (x \neq x_0)} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \infty$, on dit que C_f admet une tangente verticale en A.

A retenir : **Pente de la tangente en x_0 = $f'(x_0)$**

Remarques :
_ $f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow C_f$ admet une tangente horizontale au point d'abscisse x_0. (repérer les points dans le tableau de signes de f ')
_ avant de tracer une courbe, il faut tracer les tangentes aux points particuliers (double flèche)
_ attention à tracer une courbe tangente à ses tangentes ! (pas d'angle entre la tangente et la courbe).

Remarque : **Fonction dérivable à gauche, à droite :**
Soit f une fonction définie sur un intervalle I, et x_0 un élément de I, qui n'est pas une borne de I.
_ si $\lim\limits_{x \to x0,\ x < x0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = L \in \mathbb{R}$, on dit que f est dérivable à gauche en x_0, et on note $f_g'(x_0)$ cette limite.
Dans ce cas, on dit que C_f admet une demi-tangente à gauche en x_0.
_ la définition est analogue à droite
_ f est dérivable en x_0 si elle est dérivable à gauche et à droite, et si $f_g'(x_0) = f_d'(x_0)$.

Ex : Soit f la fonction définie sur ℝ par : $f(x) = \begin{cases} x.\ln(x) \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x \leq 0 \end{cases}$.

f est-elle dérivable en 0 ? C_f admet-elle une tangente en 0 ?

3.2 Dérivée sur un intervalle

Propriété :

La fonction f définie par :	est dérivable sur :	Sa dérivée vaut :
$f(x) = \mathbf{x^{\alpha}}$	selon α	$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$
$f(x) = \mathbf{\frac{1}{x}}$ (cas particulier avec $\alpha = -1$)	$]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
$f(x) = \mathbf{\sqrt{x}}$ (cas particulier avec $\alpha = 1/2$)	$]0;+\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x) = \mathbf{e^x}$	ℝ	$f'(x) = e^x$
$f(x) = \mathbf{\ln(x)}$	$]0;+\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{x}$

Propriété :

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I, et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors :

$u + v$, λu, uv, u^2, $\frac{1}{v}$ (si v ne s'annule pas), $\frac{u}{v}$ (si v ne s'annule pas) sont dérivables sur I et :

$\mathbf{(u + v)' = u' + v'}$ $\mathbf{(\lambda u)' = \lambda u'}$ $\mathbf{(uv)' = u'v + uv'}$ $\mathbf{(u^2)' = 2uu'}$

$\mathbf{\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}}$ $\mathbf{\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}}$

Autrement dit, la somme, le produit, le quotient (si le dénominateur ne s'annule pas) de fonctions dérivables est dérivable.

Propriété :

Soit u une fonction définie sur un intervalle I et v une fonction définie sur un intervalle J tel que $u(I) \subset J$.
Si u est dérivable sur I et v dérivable sur J, alors **$f = v \circ u$ est dérivable sur I**, et :
$\forall x \in I$, $\mathbf{f'(x) = v'(u(x)) \times u'(x)}$.

(La composée de fonctions dérivables est dérivable)

Remarques :

_ En particulier, si u est une fonction dérivable sur un intervalle I, les fonctions e^u, $\ln(u)$ (si $\forall x \in I$, $u(x) > 0$), u^{α} ($\alpha \in \mathbb{R}$, domaine de validité en fonction de α), $\sqrt{u}$ (si $\forall x \in I$, $u(x) > 0$) sont dérivables et :

$\mathbf{(e^u)' = u'e^u}$ $\mathbf{(\ln(u))' = \frac{u'}{u}}$ $\mathbf{(u^{\alpha})' = \alpha\, u^{\alpha-1} u'}$ $\mathbf{(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}}$

_ La dérivée de la fonction réciproque n'est plus au programme

3.3 Inégalité des accroissements finis

Théorème : (IAF) 1ère version

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
S'il existe deux réels m et M tels que **$\forall x \in I, m \leq f'(x) \leq M$**,
alors $\forall (a,b) \in I^2$, tells que **$a \leq b$**,

$$\mathbf{m(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a)}.$$

Théorème (IAF) 2ème version

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
S'il existe un réel K tel que **$\forall x \in I, |f'(x)| \leq K$**, alors pour tous a, b $\in$ I,

$$\mathbf{|f(b) - f(a)| \leq K\,|b - a|}$$

Remarques :
_ attention, dans la version "sans valeurs absolues", a et b doivent être dans l'ordre croissant.
_ si on a seulement $f'(x) \leq M \ \forall x \in I$, on a seulement : $f(b) - f(a) \leq M(b - a)$ (idem avec m)
_ Application aux suites récurrentes : Voir chapitre sur les suites
_ $|f'(x)| \leq K \Leftrightarrow -K \leq f'(x) \leq K$
_ pour montrer une inégalité sur f ', il faut souvent étudier les variations de f ''.

Exemple : Montrer que $\forall x \in]0 ; +\infty[\ \dfrac{1}{x+1} \leq \ln(x+1) - \ln(x) \leq \dfrac{1}{x}$

3.4 Fonctions C^1, C^2

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
On dit que f est **de classe C^1 sur I** si **f est dérivable sur I et si f ' est continue sur I**.
On dit que f est de **classe C^2** sur I si f est 2 fois dérivable sur I et si f '' est continue sur I.

Remarque : Une fonction de classe C^2 sur un intervalle I est aussi de classe C^1 sur I.

Propriétés :

Les fonctions constantes, affines, polynômes, exp sont de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.
Les fonctions racines carrées et ln sont de classe C^2 sur $]0 ; +\infty[$.
Soit p = 1 ou 2. La somme, le produit, le quotient (s'il existe), la composée (si elle existe) de fonctions de classe C^p est de classe C^p.

Rappel :
Si $p \in \mathbb{N}^*$ et si f est une fonction p fois dérivable sur un intervalle I, on note $f^{(p)}$ sa dérivée à l'ordre p.

3.5 Fonctions convexes

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que f est **convexe sur I** si
$\forall\ (x_1, x_2) \in I^2$, $\forall\ (t_1, t_2) \in [0;1]^2$ tels que $t_1 + t_2 = 1$,

$$\mathbf{f(t_1x_1 + t_2x_2) \leq t_1\, f(x_1) + t_2 f(x_2)}$$

Remarques :

_ La définition peut aussi s'écrire :
$\forall\ (x_1, x_2) \in I^2$, $\forall\ t \in [0;1]$, $f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$
_ graphiquement : f est convexe si et seulement si sa courbe est **en-dessous de chacune de ses cordes**.
_ f est **concave sur I** si :
$\forall\ (x_1, x_2) \in I^2$, $\forall\ (t_1, t_2) \in [0;1]^2$ tels que $t_1 + t_2 = 1$, $\mathbf{f(t_1x_1 + t_2x_2) \geq t_1\, f(x_1) + t_2 f(x_2)}$

Propriété :

Soit f une fonction **dérivable** sur un intervalle I, et C_f sa courbe représentative.
f est **convexe** sur I si **C_f est au-dessus de chacune de ses tangentes**.
___ concave ____________ en-dessous _______________________.

Propriété :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
Si f est de classe C^1 sur I : **f est convexe sur I $\Leftrightarrow$ f ' est croissante sur I**
Si f est de classe C^2 sur I : **f est convexe sur I $\Leftrightarrow$ f " est positive sur I.**

Définition :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle]a, b[et $x_0 \in$]a ;b[.
Le point $A(x_0, f(x_0))$ est un point d'inflexion si la fonction **change de convexité en x_0**
($\Leftrightarrow$ la courbe "traverse" la tangente en A)

Propriété :

Si f est de classe C^2 sur]a ;b[, alors $A(x_0, f(x_0))$ est un point d'inflexion si et seulement si
f " s'annule en x_0 en changeant de signe.

Application très classique : (A savoir démontrer)

Montrer que :

$\forall$ x $\in$ $\mathbb{R}$, $e^x \geq 1 + x$ et $\forall$ x > 0, $\ln(x) \leq x - 1$.

Démonstration :

On sait que la fonction exp est convexe sur $\mathbb{R}$. Donc la courbe est au-dessus de ses tangentes, en particulier en 0.

Or f (0) = 1 f '(x) = e^x donc f '(0) = 1.

Equation de la tangente : y = f '(0)(x – 0) + f(0) = x + 1

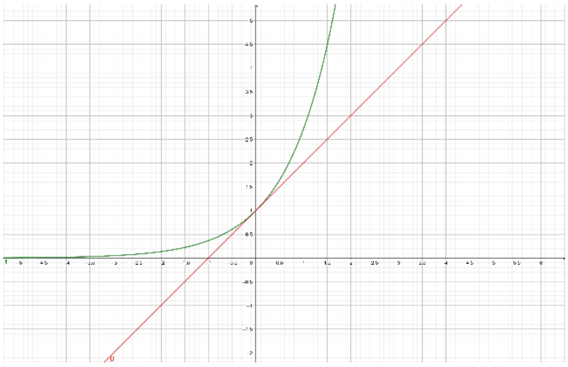
Donc $\forall$ x $\in$ $\mathbb{R}$, $e^x \geq x + 1$.

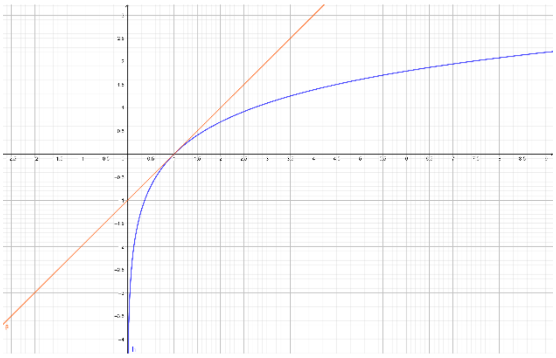
De même, ln est concave sur]0; + ∞[, donc la courbe est en-dessous de la tangente en 1.

f(1) = 0 f '(x) = $\dfrac{1}{x}$ f ' (1) = 1 Tangente : y = f '(1)(x – 1) + f(1) = x – 1

Donc $\forall$x > 0, $\ln(x) \leq x - 1$.

Avec y = x – 1 ($\Leftrightarrow$ x = y + 1), on trouve aussi : $\forall$ y > -1, $\ln(1 + y) \leq y$.





Conclusion :

Pour tracer la courbe d'une fonction :
_ choisir un repère bien adapté (échelle et position des axes)
_ placer les points particuliers, avec les tangentes (notamment tangentes horizontales)
_ placer les asymptotes
_ tracer la courbe en tenant compte des variations, symétries, tangentes, limites et asymptotes, convexités, …

Exemple :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - x^2 + 1$.

1) Etudier les variations de f et les limites de f.
2) Etudier la convexité de f. (En précisant le point d'inflexion et la pente de la tangente en ce point).
3) Tracer la courbe de f (Unité : 6 carreaux en abscisses et en ordonnées).