Chapitre 2 : Fonctions - Feuille n°1

Exercice 1

Déterminer a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^3 - 2x^2 + 4)e^{-2x}$ b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x} + \ln(x)}{x + e^{-x}}$ c) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln(x)}{x - 1}$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x + 1) - \ln(x)$ e) $\lim\limits_{x \to +\infty} x.\ln(x + 1) - x.\ln(x)$

Exercice 2

Soit $f(x) = \dfrac{1}{1 - \ln(x)}$ définie sur $]0;e[\cup]e; + \infty[$.

Déterminer les limites en 0, e et $+ \infty$. Interpréter graphiquement les résultats.

Exercice 3

Soit f la fonction définie pour tout réel non nul par : $f(x) = x.e^{1/x}$

1) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

2) Déterminer $\lim\limits_{x \to 0,\, x < 0} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to 0,\, x > 0} f(x)$.

3) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - x$.

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x} \text{ si } x > 0 \\ 1 \text{ si } x \leq 0 \end{cases}$.

Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5

On considère la fonction définie sur $]0; + \infty[$ par : $f(x) = x + \ln(x)$.

1°) Montrer que f réalise une bijection de $]0;+ \infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

2°) On appelle g l'application réciproque de f.

a) Etudier les limites, les variations, la continuité de g.

b) Déterminer $g(e + 1)$.

Exercice 6

Soit f la fonction définie sur $]0; + \infty[$ par : $f(x) = x.\ln(x) - 1$.

Montrer que f admet un unique point fixe α. Montrer que $3 < \alpha < 4$

(on donne $\ln(3) \approx 1{,}1$ $\ln(4) \approx 1{,}4$)

Exercice 7

Soit f la fonction définie sur $[0; + \infty[$ par : $f(x) = \begin{cases} x^2\ln(x) \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$.

1) Etudier la continuité de f sur $[0;+ \infty[$.

2) Etudier la dérivabilité de f sur $[0; + \infty[$. C_f admet-elle une tangente en 0 ?