Chapitre 2 : Les fonctions – Feuille n°2

Exercice 1
On considère la fonction f de l'exercice 4, feuille n°1.
1) Etudier la dérivabilité de f sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$. Calculer f' sur chacun de ces intervalles.
On admet dans la suite de l'exercice que $e^x - 1 - x \sim_0 \frac{x^2}{2}$
2) f est-elle dérivable en 0 ? C_f admet-elle une tangente en 0 ?

Exercice 2 Déterminer $\lim\limits_{x \to 3} \frac{\ln(x) - \ln(3)}{x - 3}$.

Exercice 3
Montrer que $\forall x \in\ ]0; +\infty[$, $\frac{1}{\sqrt{x+1}} \leq 2\sqrt{x+1} - 2\sqrt{x} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$.

Exercice 4
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \exp(-|x|)$.
1. Etudier la parité de f.
2. Etudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.
3. Etudier les variations de f sur $]0; +\infty[$. En déduire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$ (avec les limites).
4. Etudier la convexité de f sur $]0; +\infty[$.
5. C_f admet-elle une tangente au point d'abscisse 0 ?
6. Tracer la courbe de f dans un repère bien choisi.

Exercice 5
On note $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :
$f(x) = x - \ln(1 + x^2)$ et C la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.
On donne la valeur approchée : $\ln(2) \approx 0,69$.
1. Déterminer la limite de f en $-\infty$ et la limite de f en $+\infty$.
2. a) Montrer que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.
b) Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x)$. En déduire le sens de variation de f.
c) Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x)$.
d) Etudier la convexité de f et montrer que C admet deux points d'inflexion dont on déterminera les coordonnées.
3. Tracer C. On utilisera un repère orthonormé d'unité graphique 2 centimètres, et on précisera la tangente à C en l'origine et en chacun des points d'inflexion.

Exercice 6
En utilisant la concavité de la fonction ln, montrer que :
$$\forall x > 0, \forall y > 0, \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} \text{ (inégalité arithmético-géométrique).}$$