

## Chapitre 2 : Les fonctions – Exercices niveau 2

### Exercice 1

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue et décroissante sur  $\mathbb{R}$ .

- 1) Montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = -\infty$ . (on pourra par exemple s'aider d'une inégalité sur  $[0; +\infty[$ )
- 2) Démontrer que  $f$  admet un unique point fixe sur  $\mathbb{R}$ .

*Rappel : Théorème des valeurs intermédiaires :*

*L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle. (si  $f$  est continue sur un intervalle  $[a;b]$ , alors tout réel  $y$  compris entre deux images admet au moins un antécédent par  $f$ . ( $\Leftrightarrow$  l'équation  $f(x) = y$  admet au moins une solution)).*

### Exercice 2

Soit  $f$  une fonction continue sur  $[0;1]$ , à valeurs dans  $[0;1]$ . Montrer que  $f$  admet au moins un point fixe.

### Exercice 3

Soit  $f$  une fonction définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

- 1) Montrer que si  $f$  est paire, alors  $f'$  est impaire.
- 2) Montrer que si  $f$  est impaire, alors  $f'$  est paire.
- 3) Donner un exemple de fonction  $f$  telle que  $f'$  est paire, mais  $f$  n'est pas impaire.

### Exercice 4

Montrer que  $\forall x \in ]1; +\infty[$ ,  $\ln(\ln(x+1)) - \ln(\ln(x)) \leq \frac{1}{x \cdot \ln(x)}$

### Exercice 5

Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $g(x) = \begin{cases} x \cdot \ln(|x|) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

- 1) Justifier la continuité de  $g$  sur  $\mathbb{R}$ .
- 2) En déduire que la fonction  $h : x \mapsto x \cdot g(x)$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$ .
- 3) La fonction  $h$  est-elle de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}$  ?