Chapitre 2 – Les fonctions

Exercice 1

1) Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{e^x}{x^2}$.

a) Déterminer son ensemble de définition.
b) Déterminer les limites de f aux extrémités des intervalles où elle est définie.

2) Mêmes questions avec $f(x) = \dfrac{x}{\ln(x)}$.

Exercice 2

Déterminer

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} x.e^{-x}$ b) $\lim\limits_{x \to -\infty} x.e^{-x}$ c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x+1) - \ln(x)$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \ln(x+1) - \ln(x)$ e) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{-3x} - 1}{x}$ f) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{2x} - 1}{\ln(1+x)}$ En plus : g) $\lim\limits_{x \to 0} x^2 e^{1/x}$

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x.\ln(x)$.
1) Montrer que l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution α sur $]0; +\infty[$.
2) Montrer que $2 \leq \alpha \leq e$.

Exercice 4 (En plus)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - x - 1$.
Montrer que f admet deux points fixes sur $\mathbb{R}$. (On donne $\ln(2) \approx 0,7$)

Exercice 5

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x.\ln(x) \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}.$$

1) Etudier la continuité de f sur $[0; +\infty[$.
2) Etudier la dérivabilité de f sur $[0; +\infty[$. Interprétation graphique ?

Exercice 6

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x.e^{-x}$
On rappelle (exercice 2) que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.
1) Etudier les variations de f.
2) Etudier la concavité de f. Préciser le point d'inflexion et la pente de la tangente en ce point.
3) Tracer la courbe de f, en précisant la tangente à l'origine. (On donne : $1/e \approx 0,37$, $1/e^2 \approx 0,135$)

Exercice 7

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \exp\left(-\dfrac{x^2}{2}\right)$

1) Etudier la parité de f.
2) Déterminer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
3) Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.
4) Etudier la convexité de f sur $\mathbb{R}$. Préciser la tangente aux points d'inflexion.
5) Tracer la courbe de f dans un repère adapté. (on donne $1/\sqrt{e} \approx 0,6$)

Exercice 8 (En plus) Reprenons la fonction de l'exercice 1 : $f(x) = \dfrac{x}{\ln(x)}$.

Etudier les variations et la convexité de f. Tracer sa courbe dans un repère adapté. (on donne $e^2 \approx 7,4$)