Chapitre 2 : Les fonctions

I / Limites

1.1 Opérations sur les limites

Limite d'une somme

lim f(x) =	lim g(x) =	lim f(x) + g(x) =
$L \in \mathbb{R}$	$L' \in \mathbb{R}$	
$L \in \mathbb{R}$	$+\infty$	
$L \in \mathbb{R}$	$-\infty$	
$+\infty$	$+\infty$	
$-\infty$	$-\infty$	
$+\infty$	$-\infty$	

Limite d'un produit

lim f(x) =	lim g(x) =	lim f(x) × g(x) =
$L \in \mathbb{R}$	$L' \in \mathbb{R}$	
$L \neq 0$	∞	
∞	∞	
0	∞	

Limite d'un quotient

lim f(x) =	lim g(x) =	lim f(x)/g(x) =
$L \in \mathbb{R}$	$L' \neq 0$	
$L \neq 0$	0	
$L \in \mathbb{R}$	∞	
0	0	
∞	$L' \in \mathbb{R}$	
∞	∞	

Conclusion :
« diviser par 0 =
« diviser par ∞ =
4 formes indéterminées :

Composée : (x_0, y_0, z_0 sont des réels ou + ∞ ou - ∞)
Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = y_0$ et $\lim\limits_{y \to y_0} g(y) = z_0$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} g(f(x)) =$

1.2 Croissances comparées

Soit $\alpha > 0$, $\beta > 0$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)^\beta}{x^\alpha} =$ $\qquad \lim\limits_{x \to 0} x^\alpha(\ln(x))^\beta =$ $\qquad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{\beta x}}{x^\alpha} =$ $\qquad \lim\limits_{x \to -\infty} x^\alpha e^{\beta x} =$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} =$ $\qquad \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} =$

1.3 Asymptotes

Si $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = y_0 \in \mathbb{R}$:
Si $\lim\limits_{x \to x0} f(x) = \infty$ ($x_0 \in \mathbb{R}$) :

1.4 Limites et inégalités

Théorème de comparaison :
Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I et telles que $\forall x \in I$, $f(x) \leq g(x)$.
_ Si $\lim\limits_{x \to x0} f(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to x0} g(x) = +\infty$
_ Si $\lim\limits_{x \to x0} g(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x \to x0} f(x) = -\infty$.
_ si f et g admettent des limites réelles en x_0, alors $\lim\limits_{x \to x0} f(x) \leq \lim\limits_{x \to x0} g(x)$.

Théorème d'encadrement (ou théorème des gendarmes)
Soient f, g, h trois fonctions définies sur un intervalle I telles que : $\forall x \in I$, $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$.
S'il existe un réel L tel que $\lim\limits_{x \to x0} g(x) = \lim\limits_{x \to x0} h(x) = L$,
alors $\lim\limits_{x \to x0} f(x) = L$.

2. Etude des fonctions

2.1 Continuité

Définition :
Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $x_0 \in I$. f est continue en un point x_0 si $\lim\limits_{x \to x0} f(x) = f(x_0)$

Sur un intervalle : somme, produit, quotient, composée de fonctions continues

Pour une fonction définie par morceaux : étudier les intervalles ouverts et séparément les points de "raccordement".

Théorème de la "bijection" :
1ère version : Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I. Alors f réalise une bijection de I sur J = f(I).
De plus, f^{-1} est continue sur J, strictement monotone sur J et de même sens de variation que f.
La courbe de f^{-1} est l'image de la courbe de f par la symétrie d'axe la première bissectrice (= la droite d'équation y = x).

2ème version : Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I.
Alors pour tout $\lambda \in J = f(I)$, l'équation $f(x) = \lambda$ admet une unique solution $x_0 \in I$.

Remarques :
_ attention à vérifier que $\lambda \in f(I)$.
_ attention, λ est une constante, elle ne peut pas dépendre de x.
_ pour étudier les points fixes de f (c'est-à-dire les solutions de l'équation f(x) = x), il faut poser la fonction g(x) = f(x) – x et étudier l'équation g(x) = 0.

2.2 Dérivation

Définition : f est dérivable en x_0 si $\lim\limits_{x \to x0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe dans $\mathbb{R}$.

Dans ce cas, on appelle dérivée de f en x_0 le nombre $\mathbf{f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}$.

Tangente : C'est la droite qui passe par le point de coordonnées $(x_0, f(x_0))$ et de coefficient directeur $f'(x_0)$.
Equation : $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.
Si $\lim\limits_{x \to x0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \infty$, on dit qu'il y a une tangente verticale.

Formules de dérivation :
Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I. On suppose que v ne s'annule pas s'il est en dénominateur. Alors :

Fonction	Dérivée
$u + v$	
λu	
$u.v$	
u^2	
$\frac{1}{v}$	
$\frac{u}{v}$	
u^α	
e^u	
$\ln(u)$ (avec $u(x) > 0\ \forall x$)	
$\sqrt{u}$ (avec $u(x) > 0\ \forall x$)	

2.3 Courbe

Pour tracer la courbe d'une fonction :
- Choisir un cadre et une unité adaptés
- Placer les points particuliers (maxima, minima, points d'inflexion) et la tangente en ces points
- Placer les asymptotes
- Tracer une courbe COHERENTE avec le tableau de variations, la convexité, la parité éventuelle et toutes les propriétés démontrées sur cette fonction.