Exercice 1

Soit $x > 0$. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de VAR indépendantes qui suivent la loi exponentielle de paramètre x .

Pour $n \geq 1$, on note $M_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$.

1) Montrer que : $\forall \varepsilon > 0, \forall n \geq 1, P\left(\left|M_n - \frac{1}{x}\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{1}{nx^2\varepsilon^2}$.

2) En déduire que $\forall \varepsilon > 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\left|M_n - \frac{1}{x}\right| \geq \varepsilon\right) = 0$.

3) a) En Python, écrire une fonction M , qui à un réel x et un entier n associe une simulation de la loi de M_n .

b) Pour $n = 10000$ et pour un x inconnu, on trouve successivement :

0.5067599477171886 0.4999862996148514 0.49825876815888687

Quelle semble être approximativement la valeur de x ?

Exercice 2

Avec les bibliothèques habituelles, on considère la fonction Python suivante :

def y(n):

x=rd.poisson(3,n)

return(np.mean(x))

Pour les grandes valeurs de n , à quoi peut-on s'attendre pour les valeurs de $y(n)$?

Exercice 3

1) Préliminaire : soit $x > 0$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n = e^{-x}$.

On considère une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de VAR mutuellement indépendantes, dont chacune suit la loi uniforme sur $[0;1]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit les variables M_n et Y_n par :

$M_n = \max(X_1, \dots, X_n)$ et $Y_n = n(1 - M_n)$.

2) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la fonction de répartition de M_n .

b) Montrer que (M_n) converge en loi vers une V.A.R. M qui suit une loi certaine.

3) a) En Python, écrire une fonction $Y(n)$ qui pour un entier naturel n , simule la loi de Y_n .

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer $Y_n(\Omega)$ et la fonction de répartition de Y_n .

c) Montrer que (Y_n) converge en loi vers une VAR Y qui suit une loi exponentielle.

Exercice 4

On considère une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de variables aléatoires indépendantes qui suivent toutes la loi géométrique de paramètre p (avec $0 < p < 1$). On pose $q = 1 - p$.

Pour tout $n \geq 1$, on pose $I_n = \text{Inf}(X_1, \dots, X_n)$.

On a montré que $\forall k \geq 1, P(I_n = k) = (q^n)^{k-1}(1 - q^n)$. (feuille n°1, exercice 1)

Montrer que $(I_n)_{n \geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire discrète que l'on précisera (on pourra étudier séparément les cas $k = 1$ et $k \geq 2$).

Exercice 5

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires. On suppose que $\forall x \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow +\infty} F_{X_n}(x) = 0$.

La suite (X_n) converge-t-elle en loi ?