

Chapitre 20 : Convergence et approximations

1. Compléments sur les variables aléatoires quelconques

1.1 Loi d'une variable aléatoire

Rappels :

_ Soit (Ω, \mathcal{T}) un espace probabilisable. X est une variable aléatoire réelle définie sur (Ω, \mathcal{T}) si **X est une application de Ω dans \mathbb{R} telle que pour tout élément x de \mathbb{R} ,**

$\{\omega \in \Omega / X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{T}$.

_ Si de plus P est une probabilité sur (Ω, \mathcal{T}) , on appelle fonction de répartition de X la fonction F_X

$$\begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto P(X \leq x) \end{cases}$$

Propriété :

Si X est une VAR et si F_X est sa fonction de répartition :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$$

F_X est croissante sur \mathbb{R}

Remarque : **la loi d'une VAR est caractérisée par sa fonction de répartition.**

Propriété :

Soit X une VAR et a un réel.

Si $X(\Omega) \subset [a; +\infty[$ alors $\forall x < a, F_X(x) = 0$

Si $X(\Omega) \subset]-\infty; b]$ alors $\forall x > b, F_X(x) = 1$

Remarque :

$$\text{Donc si } a \text{ et } b \text{ sont deux réels et si } X(\Omega) \subset [a; b] \text{ alors } F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ ? & \text{si } a \leq x \leq b \\ 1 & \text{si } x > b \end{cases}$$

Rappel :

Si X et Y sont des VAR, alors $\lambda X, X + Y, X \cdot Y, \max(X, Y), \min(X, Y)$ sont des VAR.

Rappel :

Soit X et Y deux VAR. On dit que X et Y sont **indépendantes** si pour tous intervalles I et J de \mathbb{R} ,

$$P((X \in I) \cap (Y \in J)) = P(X \in I)P(Y \in J).$$

Variable discrète / à densité :

Soit X une VAR.

_ **S'il existe une partie I de \mathbb{N} ou \mathbb{Z} telle que $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$, on dit que X est une **variable discrète**.**

_ **Si F_X est continue sur \mathbb{R} et de classe C^1 sur \mathbb{R} sauf en un nombre fini de points, alors on dit que X est une **variable à densité**. (et dans ce cas $P(X = a) = 0 \forall a \in \mathbb{R}$)**

Remarques :

_ Si $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$, avec $I \subset \mathbb{N}$ ou \mathbb{Z} , on dit que $X(\Omega)$ est dénombrable.

Les intervalles de \mathbb{R} d'intérieur non vide ne sont pas dénombrables.

_ il existe des variables aléatoires qui ne sont ni discrètes, ni à densité :

Ex : Soit $X \rightarrow \mathcal{U}(\{0,1\})$ et $Y \rightarrow \mathcal{U}([0;1])$ avec X et Y indépendantes. Posons $Z = XY$.
Montrer que Z n'est ni une variable discrète, ni une variable à densité.

1.2 Espérance, variance

On admet qu'on peut étendre les notions d'espérance et de variance vues pour les variables discrètes et à densité à l'ensemble des variables aléatoires.

Les propriétés sur l'espérance et la variance peuvent alors se généraliser de la manière suivante :

Propriété :

Soit X et Y deux variables aléatoires. Si X et Y admettent une espérance, alors $X + Y$ admet une espérance et $\mathbf{E}(\mathbf{X} + \mathbf{Y}) = \mathbf{E}(\mathbf{X}) + \mathbf{E}(\mathbf{Y})$.

Propriété : *Croissance de l'espérance.*

Soit X et Y deux variables aléatoires. Si X et Y admettent chacune une espérance et si $\mathbf{P}(\mathbf{X} \leq \mathbf{Y}) = 1$ alors $\mathbf{E}(\mathbf{X}) \leq \mathbf{E}(\mathbf{Y})$.

Propriété : *Espérance du produit de variables aléatoires indépendantes.*

Soit X et Y deux variables aléatoires. Si X et Y admettent une espérance et sont **indépendantes**, alors XY admet une espérance et $\mathbf{E}(\mathbf{XY}) = \mathbf{E}(\mathbf{X})\mathbf{E}(\mathbf{Y})$.

Propriété : *Variance d'une somme de variables aléatoires indépendantes.*

Soit X et Y deux variables aléatoires. Si X et Y sont **indépendantes** et admettent une variance, $X + Y$ admet une variance et $\mathbf{V}(\mathbf{X} + \mathbf{Y}) = \mathbf{V}(\mathbf{X}) + \mathbf{V}(\mathbf{Y})$.

Propriété

Soit X une variable aléatoire et a et b deux réels.

_ si X admet une espérance, alors $Y = aX + b$ admet une espérance et

$$\mathbf{E}(\mathbf{Y}) = \mathbf{E}(\mathbf{aX} + \mathbf{b}) = \mathbf{aE}(\mathbf{X}) + \mathbf{b}$$

_ si X admet une variance, alors $Y = aX + b$ admet une variance et

$$\mathbf{V}(\mathbf{Y}) = \mathbf{V}(\mathbf{aX} + \mathbf{b}) = \mathbf{a}^2\mathbf{V}(\mathbf{X})$$

$$\sigma(\mathbf{Y}) = \sigma(\mathbf{aX} + \mathbf{b}) = |\mathbf{a}|\sigma(\mathbf{X})$$

2. Suites de variables aléatoires discrètes

2.1 Indépendance

Définition :

Soit $n \geq 1$. Soit (X_1, \dots, X_n) n variables aléatoires sur un espace probabilité $(\Omega, \mathcal{T}, \mathcal{P})$.

On dit que (X_1, \dots, X_n) sont **indépendantes** (ou **mutuellement indépendantes**) si :

pour tous intervalles I_1, \dots, I_n de \mathbb{R} ,

$$P((X_1 \in I_1) \cap \dots \cap (X_n \in I_n)) = P(X_1 \in I_1) \times \dots \times P(X_n \in I_n).$$

Propriété : **Lemme des coalitions**

Soit (X_1, \dots, X_n) n V.A.R. indépendantes. Soit $p \leq n$.

Soit $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^{n-p} \rightarrow \mathbb{R}$.

Alors les variables aléatoires $Y = f(X_1, \dots, X_p)$ et $Z = g(X_{p+1}, \dots, X_n)$ sont **indépendantes**.

Ex : Soient X_1, X_2, X_3, X_4 4 variables aléatoires indépendantes.

Alors $Y = X_1 + X_2$ et $Z = X_3 + X_4$ sont indépendantes.

Définition :

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires.

Si pour toute partie finie I de \mathbb{N} , les V.A.R. $(X_i)_{i \in I}$ sont mutuellement indépendants, alors on dit que la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes.

Remarque :

En Python, pour simuler n variables aléatoires indépendantes qui suivent la même loi, il suffit d'ajouter le paramètre n à la fin de la liste des paramètres. On obtient ainsi un tableau de n coefficients indépendants qui suivent tous la même loi. On peut également ajouter $[n,p]$ pour obtenir une matrice de taille $n \times p$, dont les coefficients suivent la même loi et sont indépendants.

Ex :

Simuler 10 fois la loi binomiale $\mathcal{B}(5, 1/3)$:

Créer une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients suivent la loi $\mathcal{G}(1/4)$:

2.2 Minimum, maximum de variables aléatoires

Propriété

Soit (X_1, \dots, X_n) n variables aléatoires.

_ Soit $Y_n = \max(X_1, \dots, X_n)$. Alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, (Y_n \leq x) = (X_1 \leq x) \cap \dots \cap (X_n \leq x) \quad (\text{idem avec } <)$$

_ Soit $Z_n = \min(X_1, \dots, X_n)$. Alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, (Z_n > x) = (X_1 > x) \cap \dots \cap (X_n > x) \quad (\text{idem avec } \geq)$$

2.3 Somme de n variables aléatoires

Remarque :

Soit n épreuves aléatoires (indépendantes ou non).

Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on définit la VAR X_i par : $X_i = \begin{cases} 1 & \text{si succès} \\ 0 & \text{si échec} \end{cases}$

Soit $X = X_1 + \dots + X_n$. Alors X représente le nombre de succès lors de ces n épreuves.

Les propriétés suivantes généralisent les propriétés vues pour $n = 2$:

Propriété :

Soit $p \in]0;1[$. Soit (X_1, \dots, X_n) n variables aléatoires **indépendantes** qui suivent toutes la loi de **Bernoulli** de paramètre p.

Alors $X = X_1 + \dots + X_n$ suit la loi $\mathcal{B}(n, p)$.

Propriété :

Soit $p \in]0;1[$ et (n_1, \dots, n_k) des entiers naturels. Soit (X_1, \dots, X_k) k variables aléatoires **indépendantes** telles que $\forall i \in \{1, \dots, k\}$, X_i suit la loi $\mathcal{B}(n_i, p)$.

Alors $X = X_1 + \dots + X_k$ suit la loi $\mathcal{B}(n_1 + \dots + n_k, p)$.

Propriété :

Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ n réels strictement positifs. Soit (X_1, \dots, X_n) n variables aléatoires **indépendantes** telles que $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, X_i suit la loi $\mathcal{P}(\lambda_i)$.

Alors $X = X_1 + \dots + X_n$ suit la loi $\mathcal{P}(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)$.

Propriété :

Soit $(m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{R}^n$ et $(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \in (\mathbb{R}^+)^n$. Soit (X_1, \dots, X_n) n variables aléatoires **indépendantes** telles que : $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $X_i \rightarrow \mathcal{N}(m_i, \sigma_i^2)$.

Alors $X = X_1 + \dots + X_n$ suit la loi $\mathcal{N}(m_1 + \dots + m_n, \sigma_1^2 + \dots + \sigma_n^2)$

Remarque :

_ Autrement dit, la somme de lois binomiales (de Poisson, normales) indépendantes suit une loi binomiale (de Poisson, normale).

_ cette propriété est fautive pour les lois uniformes, géométriques, exponentielles, ...

Rappel : Linéarité de l'espérance

Soit (X_1, \dots, X_n) n variables aléatoires discrètes qui admettent chacune une espérance.

Alors $X = X_1 + \dots + X_n$ admet une espérance et

$$\mathbf{E}(X) = \mathbf{E}(X_1 + \dots + X_n) = \mathbf{E}(X_1) + \dots + \mathbf{E}(X_n).$$

Propriété :

Soit (X_1, \dots, X_n) n variables aléatoires **indépendantes** qui admettent chacune une variance. Alors $X = X_1 + \dots + X_n$ admet une variance et :

$$\mathbf{V}(X) = \mathbf{V}(X_1 + \dots + X_n) = \sum_{i=1}^n \mathbf{V}(X_i)$$

Exemple :

Soit $p \in]0;1[$. Soit X_1, \dots, X_n n VAR indépendantes qui suivent la loi géométrique $G(p)$.

On pose $Y_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$. $E(Y_n)$? $V(Y_n)$?

Rappel :

Si (X_1, X_2) sont 2 VAR discrètes qui admettent chacune une variance et telles que $\text{cov}(X_1, X_2)$ existe, alors $X = X_1 + X_2$ admet une variance et :

$$V(X) = V(X_1 + X_2) = V(X_1) + V(X_2) + 2\text{cov}(X_1, X_2).$$

(formule qui rappelle $(a_1 + a_2)^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2$)

Remarque : Soit (a_1, \dots, a_n) n réels. Alors $(a_1 + \dots + a_n)^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} 2a_i a_j$.

Propriété :

Soit (X_1, \dots, X_n) n variables aléatoires **discrètes** qui admettent chacune une variance et telles que $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}^2$, $\text{cov}(X_i, X_j)$ existe.

Alors $X = X_1 + \dots + X_n$ admet une variance et :

$$V(X) = V(X_1 + \dots + X_n) = \sum_{i=1}^n V(X_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{cov}(X_i, X_j).$$

Exemple :

$$V(X_1 + X_2 + X_3) =$$

3. Convergences

3.1 Inégalités de Markov et de Bienaymé Tchebychev

Propriété : *Inégalité de Markov*

Soit X une variable aléatoire à valeurs positives et admettant une espérance.

Alors $\forall a > 0, P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$.

Démonstration : (dans le cas où X est une V.A.R. discrète)

Notons $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$.

$$\text{Alors } E(X) = \sum_{i \in I} x_i P(X = x_i) = \sum_{i \in I / x_i < a} x_i P(X = x_i) + \sum_{i \in I / x_i \geq a} x_i P(X = x_i)$$

$$\sum_{i \in I / x_i < a} x_i P(X = x_i) \geq 0 \text{ (somme de termes positifs)}$$

$$\forall i / x_i \geq a, x_i P(X = x_i) \geq a P(X = x_i) \text{ donc } \sum_{i \in I / x_i \geq a} x_i P(X = x_i) \geq \sum_{i \in I / x_i \geq a} a P(X = x_i)$$

$$\sum_{i \in I / x_i \geq a} x_i P(X = x_i) \geq a \sum_{i \in I / x_i \geq a} P(X = x_i) \quad \sum_{i \in I / x_i \geq a} x_i P(X = x_i) \geq a P(X \geq a)$$

$$\text{Donc } E(X) \geq a P(X \geq a) \quad a > 0 \text{ donc } P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$$

Propriété : *Inégalité de Bienaymé-Tchebychev*

Soit X une variable aléatoire, qui admet une espérance $E(X)$ et une variance $V(X)$.

Alors : $\forall \varepsilon > 0,$

$$P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2} \quad P(|X - E(X)| \leq \varepsilon) \geq 1 - \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$$

Démonstration : Posons $Y = (X - E(X))^2$.

X admet une variance, donc Y admet une espérance et $E(Y) = V(X)$

De plus Y est à valeurs positives, donc d'après l'inégalité de Markov avec $a = \varepsilon^2$:

$$P(Y \geq \varepsilon^2) \leq \frac{E(Y)}{\varepsilon^2} \quad P((X - E(X))^2 \geq \varepsilon^2) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2} \quad P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$$

L'autre inégalité s'obtient en passant à l'événement contraire.

Remarques :

$$- |X - E(X)| \leq \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon \leq X - E(X) \leq \varepsilon \Leftrightarrow E(X) - \varepsilon \leq X \leq E(X) + \varepsilon$$

$$\text{Donc l'inégalité peut aussi s'écrire : } P(E(X) - \varepsilon \leq X \leq E(X) + \varepsilon) \geq 1 - \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$$

_ l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne des inégalités très larges, qui donnent des résultats pas souvent optimaux, mais qui ont l'avantage d'exister.

Ex : Soit $n \geq 1$. On lance n fois un dé équilibré.

Soit X le nombre de 6 obtenus, et F la fréquence d'apparition du 6.

1) Déterminer $E(F)$ et $V(F)$.

2) Majorer : $P\left(\left|F - \frac{1}{6}\right| \geq \frac{1}{100}\right)$

Remarque : L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev est intéressante d'un point de vue théorique, mais numériquement peu intéressante.

3.2 Loi faible des grands nombres

Théorème (Loi faible des grands nombres)

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables indépendantes, admettant une même espérance m , et une même variance V .

$$\text{Soit } \overline{X_n} = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}.$$

Alors $\forall \varepsilon > 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|\overline{X_n} - m| \geq \varepsilon) = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|\overline{X_n} - m| < \varepsilon) = 1$.

Démonstration :

$$\text{Par linéarité : } E(\overline{X_n}) = \frac{E(X_1) + \dots + E(X_n)}{n} = \frac{m \times n}{n} = m$$

$$V(\overline{X_n}) = \frac{1}{n^2} V(X_1 + \dots + X_n) = \frac{1}{n^2} (V(X_1) + \dots + V(X_n)) \text{ (indép.)} = \frac{1}{n^2} nV = \frac{V}{n}.$$

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$P(|\overline{X_n} - E(\overline{X_n})| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(\overline{X_n})}{\varepsilon^2} \quad 0 \leq P(|\overline{X_n} - m| \geq \varepsilon) \leq \frac{V}{n\varepsilon^2}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{V}{n\varepsilon^2} = 0 \text{ donc d'après le théorème des gendarmes, } \lim_{n \rightarrow +\infty} P(|\overline{X_n} - m| \geq \varepsilon) = 0.$$

$$P(|\overline{X_n} - m| < \varepsilon) = 1 - P(|\overline{X_n} - m| \geq \varepsilon) \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} P(|\overline{X_n} - m| < \varepsilon) = 1.$$

Remarques :

_ on dit que la suite $(\overline{X_n})_{n \in \mathbb{N}}$ **converge en probabilité** vers m .

_ Si on répète indéfiniment une même épreuve de manière indépendante, et si X_n est une variable aléatoire liée à cette épreuve, alors $\overline{X_n}$ est la moyenne des valeurs pour les n premières épreuves.

On a montré ici que, d'une certaine manière, **la moyenne sur un grand nombre d'épreuves "tend vers" l'espérance de X_n** .

En particulier, si X_n est une variable de Bernoulli associé à un succès de probabilité p , $\overline{X_n}$ est la fréquence d'apparition du succès, qui "tend vers" sa probabilité p .

Exemple :

En Python, on écrit le programme suivant :

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
x=rd.geometric(1/2,1000)
y=np.mean(x)
```

A quelle valeur peut-on s'attendre environ pour y ?

3.3 Convergence en loi

Rappel : Si X suit la loi certaine de paramètre a , alors : $F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ 1 & \text{si } x \geq a \end{cases}$

Définition :

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires et X une variable aléatoire définis sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathcal{P})$.

On note F_{X_n} et F_X leurs fonctions de répartition.

On dit que la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **converge en loi vers X** , si en tout point x de \mathbb{R} où F_X est continue, on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty}$

$F_{X_n}(x) = F_X(x)$.

On note : $X_n \xrightarrow{L} X$

Remarques :

_ Attention, x est fixe, et n tend vers $+\infty$!

_ Dans une inégalité entre x et n , pensez à isoler n pour trouver la limite

Exemple :

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de V.A.R. telle que $\forall n \geq 1, X_n \rightarrow \mathcal{E}(n)$.

Soit X la variable certaine égale à 0. ($P(X = 0) = 1$).

Montrer que (X_n) converge en loi vers X .

Remarque :

Si (X_n) converge en loi vers X et si a et b sont deux points de continuité de F_X , alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(a < X_n \leq b) = P(a < X \leq b)$$

Démonstration : $P(a < X_n \leq b) = F_{X_n}(b) - F_{X_n}(a)$

et $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_{X_n}(b) - F_{X_n}(a) = F_X(b) - F_X(a) = P(a < X \leq b)$

Propriété :

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires et X une variable aléatoire définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathcal{P})$.

On suppose que les $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et X sont des **variables discrètes à valeurs dans \mathbf{N}** . Alors :

$(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en loi vers X si et seulement si $\forall k \in \mathbf{N}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n = k) = P(X = k)$.

Remarque : Attention, **k est fixe et n tend vers $+\infty$!**

Ex : (Loi géométrique tronquée).

Soit $n \geq 1$. On lance n fois une pièce dont la probabilité de faire pile est $p \in]0;1[$.

Soit X_n la variable aléatoire égale au rang du premier pile s'il y en a, et à $n + 1$ sinon.

- 1) Déterminer la loi de X_n .
- 2) Montrer que la suite (X_n) converge en loi vers une loi usuelle dont on précisera le paramètre.

4. Exemples de convergence et approximations

4.1 Loi binomiale → Loi de Poisson

Propriété

Soit $\lambda \in [0;1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires de loi binomiale $\mathcal{B}\left(n, \frac{\lambda}{n}\right)$.

Alors $(X_n)_{n \geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire X qui suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.

Démonstration :

$(X_n)_{n \geq 1}$ et X sont à valeurs dans \mathbb{N} . Il suffit de montrer que $\forall k \in \mathbb{N}, \lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n = k) = P(X = k)$.

Soit $k \in \mathbb{N}$. Pour $n < k$, $P(X_n = k) = 0$.

$$\forall n \geq k, P(X_n = k) = \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \times \frac{\lambda^k}{n^k} \times \exp\left((n-k)\ln\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)\right)$$

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \quad n-1 \sim_{+\infty} n \quad n-2 \sim_{+\infty} n \quad \dots \quad n-k+1 \sim_{+\infty} n$$

$$\frac{n(n-1)(n-k+1)}{k!} \sim \frac{n^k}{k!} \quad \frac{n!}{k!(n-k)!} \times \frac{\lambda^k}{n^k} \sim_{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\lambda}{n} = 0 \text{ donc } \ln\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right) \sim_{+\infty} -\frac{\lambda}{n} \quad n-k \sim_{+\infty} n \text{ donc } (n-k)\ln\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right) \sim_{+\infty} -\lambda$$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \exp\left((n-k)\ln\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)\right) = e^{-\lambda} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = P(X = k).$$

Remarque :

Pour n assez grand, on peut donc approcher loi $\mathcal{B}(n, \lambda/n)$ par $\mathcal{P}(\lambda)$. De plus $p = \frac{\lambda}{n} \Leftrightarrow \lambda = np$

Conclusion :

Pour n assez grand et p assez petit, on peut approcher la loi $\mathcal{B}(n,p)$ par la loi $\mathcal{P}(\lambda)$ avec $\lambda = np$

Remarques :

_ On considère en général qu'on peut faire cette approximation lorsque : $\begin{cases} p \leq 0,1 \\ n \geq 30 \\ np < 15 \end{cases}$

_ si $X \rightarrow \mathcal{B}(n,p)$ alors $E(X) = np$ si $X \rightarrow \mathcal{P}(np)$ alors $E(X) = np$. **On conserve l'espérance.**

_ La loi de Poisson est parfois appelée "loi des événements rares" : on considère une population de grande taille (n grand) et on étudie un événement rare (p petit). Dans ce cas, on peut approcher $\mathcal{B}(n,p)$ par $\mathcal{P}(np)$.

Ex : Soit $X \rightarrow \mathcal{B}(100, 0,05)$. $P(X = 3)$?

4.2 Théorème de la limite centrée

Théorème de la limite centrée :

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, de même loi, et admettant une espérance m et une variance non nulle σ^2 .

On note $\overline{X_n} = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$ et $\overline{X_n}^* = \frac{\overline{X_n} - E(\overline{X_n})}{\sigma(\overline{X_n})}$.

Alors $\overline{X_n}^*$ converge en loi vers une variable aléatoire Y de loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.

De même, si on pose $S_n = X_1 + \dots + X_n$ et $S_n^* = \frac{S_n - E(S_n)}{\sigma(S_n)}$

Alors S_n^* converge en loi vers une variable aléatoire Y de loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.

Remarques :

_ Posons $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$. Alors $E(S_n) = \sum_{k=1}^n E(X_k) = mn$

$V(S_n) = \sum_{k=1}^n V(X_k)$ (car X_1, \dots, X_n indépendants) = $n\sigma^2$

$\overline{X_n} = \frac{S_n}{n}$ donc $E(\overline{X_n}) = \frac{E(S_n)}{n} = m$ et $V(\overline{X_n}) = \frac{1}{n^2} V(S_n) = \frac{\sigma^2}{n}$. $\sigma(\overline{X_n}) = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Donc $\overline{X_n}^* = \sqrt{n} \frac{\overline{X_n} - m}{\sigma}$.

_ On a $S_n = n \overline{X_n}$ donc $S_n^* = \frac{S_n - E(S_n)}{\sigma(S_n)} = \frac{n \overline{X_n} - nE(\overline{X_n})}{n\sigma(\overline{X_n})} = \frac{\overline{X_n} - E(\overline{X_n})}{\sigma(\overline{X_n})} = \overline{X_n}^*$.

_ Φ est continue sur \mathbb{R} ,

on a donc $\forall a < b, \lim_{n \rightarrow +\infty} P(a < \overline{X_n}^* \leq b) = P(a \leq Y \leq b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx = \Phi(b) - \Phi(a)$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(a < \sqrt{n} \frac{\overline{X_n} - m}{\sigma} \leq b) = \Phi(b) - \Phi(a)$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(m + \frac{a\sigma}{\sqrt{n}} < \overline{X_n} \leq m + \frac{b\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \Phi(b) - \Phi(a)$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(mn + a\sigma\sqrt{n} < S_n \leq mn + b\sigma\sqrt{n}) = \Phi(b) - \Phi(a)$.

Exemple :

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de VAR indépendantes qui suivent toutes la loi uniforme sur $[0;1]$.

On pose $Y_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$.

1) Déterminer $E(Y_n)$, $\sigma(Y_n)$.

2) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{12n}} \leq Y_n \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{12n}}\right)$.

Approximation :

_ Pour $n \geq 30$, on considère qu'on peut donc approcher la loi de $\overline{X_n}^* = \frac{\overline{X_n} - E(\overline{X_n})}{\sigma(\overline{X_n})}$ par la loi $\mathcal{N}(0,1)$.

_ Rappel : $X \rightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2) \Leftrightarrow X^* = \frac{X - m}{\sigma} \rightarrow \mathcal{N}(0,1)$.

Donc on peut approcher $\overline{X_n}$ par la loi $\mathcal{N}(E(\overline{X_n}), V(\overline{X_n}))$.

S_n par la loi $\mathcal{N}(E(S_n), V(S_n))$.

Ex :

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de V.A. indépendantes de même loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1$.

Soit $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$. $P(105 < S_{100} \leq 110)$?

4.3 Loi binomiale \longrightarrow Loi normale

Principe :

Soit $p \in]0;1[$. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de V.A.R. indépendantes de même loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$. Leur espérance est $m = p$, leur écart-type est $\sigma = \sqrt{p(1-p)}$.

Pour $n \geq 1$, soit $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$.

On sait que S_n suit la loi binomiale de paramètres n et p . Donc $E(S_n) = np$ $V(S_n) = np(1-p)$

D'après le théorème de la limite centrée, $S_n^* = \frac{S_n - E(S_n)}{\sigma(S_n)} = \frac{S_n - np}{\sqrt{p(1-p)}\sqrt{n}}$ converge en loi vers une V.A.R. X

de loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.

On peut approcher S_n^* par une V.A.R. de loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.

On peut donc approcher S_n par une V.A.R. de loi normale $\mathcal{N}(np, np(1-p))$.

A retenir :

On peut approcher $\mathcal{B}(n,p)$ par $\mathcal{N}(np, np(1-p))$ (condition : si $\begin{cases} n \geq 30 \\ np \geq 15 \\ np(1-p) > 5 \end{cases}$)

Remarques :

– si $X \longrightarrow \mathcal{B}(n,p)$ $E(X) = np$ $V(X) = np(1-p)$

– si $X \longrightarrow \mathcal{N}(np, np(1-p))$, $E(X) = np$ $V(X) = np(1-p)$.

On conserve l'espérance et la variance.

_ Correction de continuité :

Si $X \longrightarrow \mathcal{B}(n,p)$, X prend des valeurs entières entre 0 et n .

Pour approcher X , on remplace :

$P(X = 0)$ par $P(X \leq 0,5)$

$P(X = k)$ (pour $k \in \{1, \dots, n-1\}$) par $P(k-0,5 < X \leq k+0,5)$

$P(X = n)$ par $P(X > n-0,5)$.

Ex :

On lance 100 fois une pièce équilibrée. Soit X le nombre de piles obtenus. $P(X = 53)$?

4.4 Loi de Poisson -> Loi normale

Principe :

Soit $\lambda > 0$. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de V.A.R. indépendantes de même loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda_0)$. Leur espérance est $m = \lambda_0$, leur écart-type est $\sigma = \sqrt{\lambda_0}$.

Pour $n \geq 1$, soit $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$.

On sait que S_n suit la loi de Poisson de paramètre $n\lambda_0$. $E(S_n) = n\lambda_0$ $V(S_n) = n\lambda_0$

D'après le théorème de la limite centrée, $S_n^* = \frac{S_n - E(S_n)}{\sigma(S_n)} = \frac{S_n - n\lambda}{\sqrt{\lambda}\sqrt{n}}$ converge en loi vers une V.A.R. X de loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.

On peut approcher S_n^* par une V.A.R. de loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.

Par transformation affine, on peut approcher S_n par une V.A.R. de loi normale $\mathcal{N}(n\lambda_0, n\lambda_0)$.

En posant $\lambda = n\lambda_0$, on obtient :

A retenir :

Pour λ suffisamment grand, on peut approcher $\mathcal{P}(\lambda)$ par $\mathcal{N}(\lambda, \lambda)$
 (Exemple de condition : $\lambda \geq 18$)

Remarques :

_ si $X \rightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ $E(X) = \lambda$ $V(X) = \lambda$ si $X \rightarrow \mathcal{N}(\lambda, \lambda)$, $E(X) = \lambda$ $V(X) = \lambda$.

On conserve l'espérance et la variance.

_ comme pour la loi binomiale, on peut utiliser la correction de continuité, en remplaçant

$P(X = 0)$ par $P(X \leq 0,5)$ et $\forall k \geq 1$, $P(X = k)$ par $P\left(k - \frac{1}{2} \leq X \leq k + \frac{1}{2}\right)$

Exemple :

Soit $X \rightarrow \mathcal{P}(100)$. $P(X \leq 90)$?

Conclusion :

Loi :	Approchée par :	Conditions (selon énoncé !)
$\mathcal{B}(n,p)$	$\mathcal{P}(np)$	n grand, p petit
$\mathcal{B}(n,p)$	$\mathcal{N}(np, np(1-p))$	n grand
$\mathcal{P}(\lambda)$	$\mathcal{N}(\lambda, \lambda)$	λ grand