Chapitre 20 : Convergence, approximations – Correction niveau 2

Exercice 1

1. a) On voit que $X_{(n,n)} = \max(X_1, \dots, X_n)$ et $X_{(n,1)} = \min(X_1, \dots, X_n)$.

b) $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_{(n,n)}(x) = P(X_{(n,n)} \le x) = P\big((X_1 \le x) \cap \dots \cap (X_n \le x)\big)$

$= P(X_1 \le x)\dots P(X_n \le x)$ ($X_1, \dots, X_n$ indépendantes)

$= F(x)^n$.

f est une densité de probabilité, donc f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf en un nombre fini de points, que l'on notera $(x_1, \dots, x_p)$.

X est une variable à densité, de densité f, donc F est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf en $(x_1, \dots, x_p)$.

Donc $F_{(n,n)}$ également. Donc $X_{(n,n)}$ est une variable à densité.

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$, $F_{(n,n)}'(x) = n.F'(x).F(x)^{n-1} = n.f(x).F(x)^{n-1}$

Donc une densité de $X_{(n,n)}$ sur $\mathbb{R}$ est définie par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_{(n,n)}(x) = n.f(x).F(x)^{n-1}$.

c) De même, $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_{X(n,1)}(x) = P(X_{(n,1)} \le x) = 1 - P(X_{(n,1)} > x)$

$= 1 - P\big((X_1 > x) \cap \dots \cap (X_n > x)\big)$

$= 1 - P(X_1 > x)\dots P(X_n > x)$ ($X_1, \dots, X_n$ indépendantes)

$= 1 - (1 - F_{X1}(x))\dots(1 - F_{Xn}(x))$

$= 1 - (1 - F(x))^n$.

De même, $F_{X(n,1)}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf en $(x_1, \dots, x_p)$.

Donc $X_{(n,1)}$ est une variable à densité.

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$, $F_{X(n,1)}'(x) = - n(- F'(x))(1 - F(x))^n = n.f(x).(1 - F(x))^n$.

Donc une densité de $X_{(n,1)}$ est définie par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_{(n,1)}(x) = n.f(x)(1 - F(x))^{n-1}$

2. a) $Y_{i,x}(\Omega) = \{0,1\}$ et $P(Y_{i,x} = 1) = P(X_i \le x) = F(x)$ donc $Y_{i,x}$ suit une loi de Bernoulli de paramètre F(x).

b) $[X_{(n,k)} \le x]$ = « la $k^{\text{ème}}$ valeur (dans l'ordre) est inférieure ou égale à x »

= « il y a au moins k valeurs inférieures ou égales à x »

= « le nombre de $(X_i)_{1\le i\le n}$ inférieurs ou égaux à x est au moins égal à k »

$= \left[\sum_{i=1}^{n} Y_{i,x} \ge k\right]$

c) Les $(X_i)_{1 \le i \le n}$ sont indépendantes, donc d'après le lemme des coalitions, les $(Y_{i,x})_{1 \le i \le n}$ le sont également.

Donc la variable aléatoire $Z_{n,x} = \sum_{i=1}^{n} Y_{i,x}$ sui la loi binomiale $\mathcal{B}(n, F(x))$.

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_{(n,k)}(x) = P(Z_{n,x} \ge k) = \sum_{j=k}^{n} P(Z_{n,x} = j) = \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} F(x)^j (1 - F(x))^{n-j}$

Exercice 2

1) $\text{card}(\Omega) = n!$ (n tirages sans remise)

$\text{card}(X_i = 1) = 1$ (une place possible pour la boule n°i) $\times$ $(n - 1)!$ (on place les autres boules).

Donc $P(X_i = 1) = \dfrac{(n-1)!}{n!} = \dfrac{1}{n}$

$X_i \longrightarrow B(1/n)$ donc $E(X_1) = \dfrac{1}{n}$ $V(X_i) = \dfrac{1}{n}\left(1 - \dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{n-1}{n^2}$.

2) a) $(X_i = 1) \cap (X_j = 1)$ = "on a déjà choisi la place des boules i et j, il reste n – 2 boules à placer"

$P((X_i = 1) \cap (X_j = 1)) = \dfrac{(n-2)!}{n!} = \dfrac{1}{n(n-1)}$

b) $E(X_iX_j) = 0 \times 0 \times P((X_i = 0) \cap (X_j = 0)) + 1 \times 0 \times P((X_i = 1) \cap (X_j = 0))$

$+ 0 \times 1 \times P((X_i = 0) \cap (X_j = 1)) + 1 \times 1 \times P((X_i = 1) \cap (X_j = 1)) = \dfrac{1}{n(n-1)}$ (th. de transfert)

$\mathrm{cov}(X_i, X_j) = E(X_iX_j) - E(X_i)E(X_j) = \dfrac{1}{n(n-1)} - \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{n-(n-1)}{n^2(n-1)} = \dfrac{1}{n^2(n-1)}$.

3) X est le nombre de rencontres donc $X = X_1 + \ldots + X_n$

Par linéarité $E(X) = \sum\limits_{i=1}^{n} E(X_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{n} = n \times \dfrac{1}{n} = 1$.

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) + 2 \sum_{1 \le i < j \le n} \mathrm{cov}(X_i, X_j) = \sum_{i=1}^{n} \frac{n-1}{n^2} + 2 \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{j-1} \frac{1}{n^2(n-1)} \right)$$

$$= \frac{n-1}{n} + \frac{2}{n^2(n-1)} \sum_{j=1}^{n} (j-1) = \frac{n-1}{n} + \frac{2}{n^2(n-1)} \sum_{j'=0}^{n-1} j' \quad \text{(avec } j' = j-1\text{)}$$

$$= \frac{n-1}{n} + \frac{2}{n^2(n-1)} \times \frac{(n-1)n}{2} = \frac{n-1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{n}{n} = 1.$$

Exercice 3

1) $X_n(\Omega) = \{0 ; +\infty[$ donc $Y_n(\Omega) = \mathbb{N}$

$\forall k \in \mathbb{N}$, $P(Y_n = k) = P(k \le X_n < k+1) = F_{X_n}(k+1) - F_{X_n}(k) = 1 - e^{-(k+1)/n} - (1 - e^{-k/n})$

$= e^{-k/n} - e^{-(k+1)/n} = e^{-k/n}(1 - e^{-1/n})$

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} k.P(Y_n = k) = \sum_{k \in \mathbb{N}} k.\, e^{-k/n}(1 - e^{-1/n}) = (1 - e^{-1/n}) \sum_{k \in \mathbb{N}} k\left(e^{-1/n}\right)^k = (1 - e^{-1/n})e^{-1/n} \sum_{k \in \mathbb{N}} k\left(e^{-1/n}\right)^{k-1}$$

$-\dfrac{1}{n} < 0$ donc $e^{-1/n} < e^0$

$-1 < e^{-1/n} < 1$ donc la série converge absolument. Donc Y_n admet une espérance et

$E(Y_n) = (1 - e^{-1/n})e^{-1/n} \times \dfrac{1}{(1 - e^{-1/n})^2} = \dfrac{e^{-1/n}}{1 - e^{-1/n}}$

Ou : Posons $T_n = Y_n + 1$. Alors $T_n(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $\forall k \ge 1$, $P(T_n = k) = P(Y_n = k-1) = \left(e^{-1/n}\right)^{k-1}(1 - e^{-1/n})$

Donc $T_n \longrightarrow \mathcal{G}(1 - e^{-1/n})$. Donc $E(T_n) = \dfrac{1}{1 - e^{-1/n}}$.

$Y_n = T_n - 1$ donc $E(Y_n) = E(T_n) - 1 = \dfrac{1}{1 - e^{-1/n}} - 1 = \dfrac{1 - (1 - e^{-1/n})}{1 - e^{-1/n}} = \dfrac{e^{-1/n}}{1 - e^{-1/n}}$

2) $Z_n(\Omega) = [0 ;1[$

D'après la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(Y_n = k)_{k \in \mathbb{N}}$,

$$\forall t \in [0 ;1],\ P(Z_n \le t) = \sum_{k=0}^{+\infty} P\big((Y_n = k) \cap (Z_n \le t)\big) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(k \le X_n \le k + t)$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \big(F_{X_n}(k+t) - F_{X_n}(k)\big) = \sum_{k=0}^{+\infty} (1 - e^{-(k+t)/n} - (1 - e^{-k/n}))$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} (e^{-k/n} - e^{-(k+t)/n}) = \sum_{k=0}^{+\infty} (e^{-k/n} - e^{-t/n}e^{-k/n}) = (1 - e^{-t/n}) \sum_{k=0}^{+\infty} (e^{-1/n})^k \qquad e^{-1/n} \ne 1 \text{ donc}$$

$$= \frac{1 - e^{-t/n}}{1 - e^{-1/n}}$$

$$3)\ F_{Z_n}(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t < 0 \\ \dfrac{1 - e^{-t/n}}{1 - e^{-1/n}} \text{ si } 0 \le t < 1 \\ 1 \text{ si } t > 1 \end{cases}$$

$\forall\, t < 0,\ \lim\limits_{n \to +\infty} F_{Z_n}(t) = \lim\limits_{n \to +\infty} 0 = 0$

Soit $t \in [0\,;1[$

$\lim\limits_{n \to +\infty} -\dfrac{1}{n} = 0$ donc $e^{-1/n} - 1 \sim_{+\infty} -\dfrac{1}{n}$ $\quad 1 - e^{-1/n} \sim_{+\infty} \dfrac{1}{n}$ $\quad$ De même, $1 - e^{-t/n} \sim_{+\infty} \dfrac{t}{n}$.

Donc $F_{Z_n}(t) \sim_{+\infty} \dfrac{t/n}{1/n} \sim_{+\infty} t$ $\quad \lim\limits_{n \to +\infty} F_{Z_n}(t) = t$

$\forall\, t \geq 1,\ \lim\limits_{n \to +\infty} F_{Z_n}(t) = \lim\limits_{n \to +\infty} 1 = 1$ $\qquad$ Soit $Z \longrightarrow U([0\,;1])$. Alors $\forall\, t \in \mathbb{R},\ \lim\limits_{n \to +\infty} F_{Z_n}(t) = F_Z(t)$.

Donc (Z_n) converge en loi vers Z.

4) Pour $k \in [[1;n]]$ $P\left(X_k \leq \dfrac{k}{n}\right) = F_{X_k}\left(\dfrac{k}{n}\right) = 1 - e^{-(k/n)/k} = 1 - e^{-1/n}$ (ne dépend pas de k).

Les variables (X_k) sont indépendantes, donc les événements $\left(X_k \leq \dfrac{k}{n}\right)$ sont indépendants.

Donc $N_n \longrightarrow \mathcal{B}\left(n,\ 1 - e^{-1/n}\right)$

b) Posons $p_n = 1 - e^{-1/n}$ $\quad \begin{cases} \forall\, k \leq n,\ P(N_n = k) = \dbinom{n}{k} p_n^{\,k}(1 - p_n)^{n-k} \\ \forall\, k > n,\ P(N_n = k) = 0 \end{cases}$

Soit $k \in \mathbb{N}$ fixé. Pour tout $n \geq k$

$\dbinom{n}{k} = \dfrac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} \sim_{+\infty} \dfrac{n^k}{k\,!}$ $\quad 1 - e^{-1/n} \sim_{+\infty} \dfrac{1}{n}$ donc $p_n^{\,k} \sim_{+\infty} \dfrac{1}{n^k}$

$(1 - p_n)^{n-k} = e^{(n-k)\ln(1-p_n)}$

$\ln(1 - p_n) = \ln(e^{-1/n}) = -\dfrac{1}{n}$ $\qquad (n - k) \sim_{+\infty} n$ $\quad$ donc $(n-k)\ln(1-p_n) \sim_{+\infty} -1$

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (n-k)\ln(1-p_n) = -1$ $\qquad \lim\limits_{n \to +\infty} e^{(n-k)\ln(1-p_n)} = e^{-1}$.

Donc $P(N_n = k) \sim_{+\infty} \dfrac{n^k}{k\,!}\dfrac{1}{n^k}e^{-1} \sim_{+\infty} \dfrac{1}{k!}e^{-1}$. $\quad$ Soit $N \longrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$.

Alors $\forall\, k \in \mathbb{N},\ \lim\limits_{n \to +\infty} P(N_n = k) = P(N = k)$. $\quad (N_k)$ converge en loi vers N.