Exercice 1 Statistiques d'ordre

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Soit f une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$, X une variable aléatoire réelle ayant f pour densité et F sa fonction de répartition.

Soit $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes, de même loi que X . Pour tout entier $n \geq 1$, on ordonne, pour chaque $\omega \in \Omega$, le n -uplet $(X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_n(\omega))$ en :

$$X_{(n,1)}(\omega) \leq X_{(n,2)}(\omega) \leq \dots \leq X_{(n,n)}(\omega)$$

et on admet que les applications $X_{(n,k)}$ ainsi définies sont des variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Pour tous k, n entiers tels que $1 \leq k \leq n$, la variable aléatoire $X_{(n,k)}$ donne la k -ième valeur obtenue en classant dans l'ordre croissant les valeurs prises par les n premières X_i .

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$

a) Exprimer les variables aléatoires $X_{(n,n)}$ et $X_{(n,1)}$ en fonction de $X_1, \dots, X_n$.

b) Exprimer, à l'aide de F , la fonction de répartition $F_{(n,n)}$ de la variable aléatoire $X_{(n,n)}$.

En déduire que $X_{(n,n)}$ est une variable à densité, et admet comme densité la fonction $f_{(n,n)}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_{(n,n)}(x) = n \cdot f(x) \cdot F(x)^{n-1}$$

c) Par une méthode similaire, montrer que $X_{(n,1)}$ admet comme densité $f_{(n,1)}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_{(n,1)}(x) = n \cdot f(x) \cdot (1 - F(x))^{n-1}$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$ et soient n et k deux entiers tels que $1 \leq k \leq n$.

Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on note $Y_{i,x}$ la variable aléatoire indicatrice de l'événement $[X_i \leq x]$. C'est à dire

$$Y_{i,x} = \begin{cases} 1 & \text{si } X_i \leq x \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

a) Montrer que $Y_{i,x}$ suit une loi de Bernoulli dont on précisera le paramètre.

b) Montrer l'égalité entre les événements : $[X_{(n,k)} \leq x] = \left[\sum_{i=1}^n Y_{i,x} \geq k \right]$

c) En déduire que la fonction de répartition $F_{(n,k)}$ de la variable aléatoire $X_{(n,k)}$ est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_{(n,k)}(x) = \sum_{j=k}^n \binom{n}{j} F(x)^j (1 - F(x))^{n-j}$$

Exercice 2

Soit $n \geq 2$. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n . On les extrait successivement sans remise. Pour $i \in \{1, \dots, n\}$, on dit qu'il y a rencontre au $i^{\text{ème}}$ tirage si la $i^{\text{ème}}$ boule tirée porte le numéro i . On note X la variable aléatoire égale au nombre de rencontres. On veut déterminer l'espérance et la variance de X .

1) Pour $i \in \{1, \dots, n\}$, on note X_i la variable aléatoire qui vaut 1 s'il y a rencontre au $i^{\text{ème}}$ tirage, et 0 sinon. Déterminer la loi de X_i , son espérance et sa variance.

2) Soit $i \neq j$.

a) Déterminer $P((X_i = 1) \cap (X_j = 1))$.

b) En déduire que $\text{cov}(X_i, X_j) = \frac{1}{n^2(n-1)}$.

3) a) Exprimer X en fonction des $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$

b) En déduire que $E(X) = 1$ et $V(X) = 1$.

Exercice 3 (Oral HEC 2011)

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n suit la loi exponentielle de paramètre $1/n$ (d'espérance n).

Pour tout x réel on note $[x]$ sa partie entière.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soient : $Y_n = [X_n]$ et $Z_n = X_n - [X_n]$.

1) Déterminer la loi de Y_n et son espérance.

2) Déterminer $Z_n(\Omega)$ et montrer que, $\forall t \in [0, 1] : P(Z_n \leq t) = \frac{1 - e^{-t/n}}{1 - e^{-1/n}}$.

3) Montrer que la suite de variables aléatoires $(Z_n)_n$ converge en loi vers une variable aléatoire Z dont on précisera la loi.

4) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et N_n la variable aléatoire définie par :

$$N_n = \text{card} \left\{ k \in [[1, n]] \text{ tel que } X_k \leq \frac{k}{n} \right\}$$

où $\text{card}(A)$ désigne le nombre d'éléments de l'ensemble fini A .

a) Reconnaître la loi de N_n et donner son espérance et sa variance.

b) Montrer que la suite de variables aléatoires $(N_n)_n$ converge en loi vers une variable aléatoire N dont on précisera la loi.