

Chapitre 21 – Systèmes différentiels linéaires

1. Résolution d'un système différentiel linéaire

1.1 Définitions et notations

Définition :

Soit I un intervalle et $x_1, \dots, x_n$ n fonctions de classe C^1 sur I . On note $X = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$ et $X' = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{pmatrix}$

Soit $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Résoudre le système différentiel linéaire $X' = AX$, c'est trouver toutes les familles de fonctions

$(x_1(t), \dots, x_n(t))$ qui vérifient $\forall t \in I, \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$.

Remarque :

Autrement dit, les solutions du système différentiel $X' = AX$ sont les familles de fonctions $(x_1(t), \dots, x_n(t))$

qui vérifient : $\forall t \in I, \begin{cases} x_1'(t) = a_{1,1}x_1(t) + \dots + a_{1,n}x_n(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) = a_{n,1}x_1(t) + \dots + a_{n,n}x_n(t) \end{cases}$

Remarque : **Equation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 et système différentiel**

On considère une équation différentielle d'ordre 2 : $x'' + ax' + bx = 0$ (E)

Posons $y = x'$. Donc $y' = x''$

L'équation (E) est alors équivalente à :

$$\begin{cases} y = x' \\ y' + ay + bx = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = y \\ y' = -bx - ay \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

En posant $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix}$, on obtient donc le système différentiel : $X' = AX$.

Inversement, un système différentiel linéaire $X' = AX$, avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c & d \end{pmatrix}$ peut se traduire par une équation différentielle linéaire d'ordre 2.

Ex : Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$. Résoudre le système différentiel $X' = AX$

Posons $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$. $X' = A.X \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x'(t) = y(t) \\ y'(t) = -2x(t) + 3y(t) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x' \\ x'' = -2x + 3x' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x' \\ x'' - 3x' + 2x = 0 \end{cases}$ (équation linéaire homogène d'ordre 2)

Equation caractéristique : $r^2 - 3r + 2 = 0 \quad (r-1)(r-2) = 0$

Donc $x(t) = \lambda.e^t + \mu.e^{2t}$ $y(t) = x'(t) = \lambda.e^t + 2\mu.e^{2t}$. Donc $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 2e^{2t} \end{pmatrix}$

1.2 Cas d'une matrice diagonale

Propriété :

Soit I un intervalle et D une matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, de la forme $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & & \dots \\ \dots & & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$.

Alors les solutions du système différentiel $X' = DX$ sont les fonctions

$$\begin{cases} x_1(t) = a_1 \exp(\lambda_1 t) \\ \dots \\ x_n(t) = a_n \exp(\lambda_n t) \end{cases}, \text{ où } (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$$

Démonstration (à redémontrer) :

Le système $X' = DX$ peut s'écrire : $\begin{cases} x_1'(t) = \lambda_1 x_1(t) \\ \dots \\ x_n'(t) = \lambda_n x_n(t) \end{cases}$, c'est-à-dire, $\begin{cases} x_1'(t) - \lambda_1 x_1(t) = 0 \\ \dots \\ x_n'(t) - \lambda_n x_n(t) = 0 \end{cases}$

Chacune des n équations différentielles est indépendante, et a pour solution : $x_i(t) = a_i \exp(\lambda_i t)$, avec $a_i \in \mathbb{R}$.
D'où le résultat

Ex : Soit $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Résoudre le système différentiel (S) $Y' = DY$.

Posons $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$.

Alors (S) $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1' = 2y_1 \\ y_2' = -y_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1' - 2y_1 = 0 \\ y_2' + y_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1(t) = \lambda e^{2t}, \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R} \\ y_2(t) = \mu e^{-t}, \text{ avec } \mu \in \mathbb{R} \end{cases}$

1.3 Cas des matrices diagonalisables

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que A est diagonalisable, c'est-à-dire qu'il existe une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que $A = PDP^{-1}$.

Alors les solutions du système différentiel $X' = AX$ sont les fonctions du type $X = PY$, où Y est une solution de l'équation $Y' = DY$.

Démonstration (A savoir refaire) :

Posons $Y = P^{-1}X$. On a donc $X = PY$

Il est évident, par linéarité de la dérivation, que $Y' = P^{-1}X'$

Donc $X' = AX \Leftrightarrow X' = PDP^{-1}X$

$$\Leftrightarrow P^{-1}X' = P^{-1}PDP^{-1}X \quad (\times P^{-1} \text{ à gauche})$$

$$\Leftrightarrow Y' = DY$$

Exemple :

Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$.

On admet que A est diagonalisable, et que $A = PDP^{-1}$, avec $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Déterminer les solutions du système différentiel $X' = AX$

Posons $Y = P^{-1}X$. Alors $X = PY$.

Donc $X' = AX \Leftrightarrow X' = PDP^{-1}X$

$$\Leftrightarrow P^{-1}X' = P^{-1}PD(P^{-1}X) \quad \Leftrightarrow Y' = DY$$

Or, on a vu dans l'exemple précédent que les solutions de ce système différentiel sont les fonctions :

$$\begin{cases} y_1(t) = \lambda e^{2t} \\ y_2(t) = \mu e^{-t} \end{cases} \text{ avec } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

$$\text{Donc } X = PY \quad \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda e^{2t} \\ \mu e^{-t} \end{pmatrix} \quad \begin{cases} x_1(t) = 2\lambda e^{2t} + \mu e^{-t} \\ x_2(t) = \lambda e^{2t} + \mu e^{-t} \end{cases}$$

Remarque : (**A retenir**)

Si A est diagonalisable, de valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, les solutions sont des combinaisons linéaires des fonctions $t \mapsto \exp(\lambda_i t)$ ($i \in \{1, \dots, n\}$)

Plus précisément, si $V_1, \dots, V_n$ est une base de vecteurs propres (avec V_i associé à la valeur propre λ_i pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$), alors les solutions sont les fonctions de la forme :

$$X(t) = \sum_{i=1}^n a_i \exp(\lambda_i t) V_i, \text{ avec } (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$$

$$\text{En effet, la formule } X(t) = P \cdot Y(t) \text{ devient } X(t) = (V_1 \dots V_n) \begin{pmatrix} a_1 \exp(\lambda_1 t) \\ \dots \\ a_n \exp(\lambda_n t) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n a_i \exp(\lambda_i t) V_i$$

1.4 Solutions et conditions initiales

Propriété (admise) – **Problème de Cauchy**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $t_0 \in \mathbb{R}$ et $(k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{R}^n$.

Alors le système différentiel $X' = AX$ admet une **unique solution** X telle que $X(t_0) = \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}$.

Exemple : Suite de l'exemple précédent.

On a vu que le système différentiel $X' = A.X$, avec $A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$, a pour solutions :

$$\begin{cases} x_1(t) = 2\lambda e^{2t} + \mu e^{-t} \\ x_2(t) = \lambda e^{2t} + \mu e^{-t} \end{cases}, \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R} \text{ et } \mu \in \mathbb{R}.$$

Déterminer la solution telle que $\begin{cases} x_1(0) = 1 \\ x_2(0) = -1 \end{cases}$:

(Remarque : la propriété du problème de Cauchy nous indique déjà que cette solution existe et est unique).

$$\begin{cases} x_1(0) = 1 \\ x_2(0) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda + \mu = 1 \\ \lambda + \mu = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda + \mu = 1 \\ \lambda = 2 \end{cases} \xrightarrow{L_2 \rightarrow L_1 - L_2} \begin{cases} 2\lambda + \mu = 1 \\ \lambda = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = -3 \\ \lambda = 2 \end{cases}$$

Donc le couple solution est : $\begin{cases} x_1(t) = 4e^{2t} - 3e^{-t} \\ x_2(t) = 2e^{2t} - 3e^{-t} \end{cases}$

2. Points d'équilibre et trajectoires convergentes

Définition

On considère un système différentiel et $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$ une solution de ce système.

On dit que la trajectoire $X(t)$ est convergente, s'il existe des réels $L_1, \dots, L_n$ tels que : $\begin{cases} \lim_{t \rightarrow +\infty} x_1(t) = L_1 \\ \vdots \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} x_n(t) = L_n \end{cases}$.

Dans ce cas, on dit que X converge vers le vecteur $L = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix}$.

L est appelé un point d'équilibre, ou un état d'équilibre.

Exemple :

On a vu que le système différentiel $X' = A.X$, avec $A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$, a pour solutions :

$$\begin{cases} x_1(t) = 2\lambda e^{2t} + \mu e^{-t} \\ x_2(t) = \lambda e^{2t} + \mu e^{-t} \end{cases}, \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R} \text{ et } \mu \in \mathbb{R}.$$

Déterminer les trajectoires convergentes.

_ si $\lambda \neq 0$, les fonctions x_1 et x_2 ont une limite infinie en $+\infty$.

_ si $\lambda = 0$: $\begin{cases} x_1(t) = \mu e^{-t} \\ x_2(t) = \mu e^{-t} \end{cases}$ Dans ce cas les fonctions x_1 et x_2 tendent vers 0.

Donc les trajectoires qui convergent sont les trajectoires du type $\begin{pmatrix} \mu e^{-t} \\ \mu e^{-t} \end{pmatrix}$, avec $\mu \in \mathbb{R}$.

Ces trajectoires convergent vers l'état d'équilibre $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Propriété (admise) :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On considère le système différentiel linéaire $X' = AX$.

Soit $L \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. L est un point d'équilibre si et seulement si la fonction $t \mapsto L$ est une solution du système différentiel.

Autrement dit : L est un point d'équilibre si et seulement si c'est une trajectoire constante

Propriété :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On considère le système différentiel linéaire $X' = AX$.

Alors l'ensemble **des points d'équilibre** est l'ensemble des **solutions de l'équation $AX = 0$** (d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$).

Démonstration : Soit $L \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

L est un point d'équilibre $\Leftrightarrow$ la fonction constante $t \mapsto L$ est une solution

$$\Leftrightarrow L' = AL \text{ (avec } L' = 0 \text{ car constante)}$$

$$\Leftrightarrow 0 = AL$$

Remarque :

On en déduit facilement que :

_ si A est **inversible**, le seul point d'équilibre est $\mathbf{0}_{n,1}$.

_ si A n'est **pas inversible** (c'est-à-dire si 0 est valeur propre), l'ensemble des points d'équilibres est $\mathbf{E}_0(A)$.

Exemple :

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Déterminer les points d'équilibre du système différentiel $X' = AX$

$$\text{Posons } X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. AX = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y$$

Les points d'équilibres sont les points $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

Propriété : Cas d'une matrice diagonalisable

Soit A une matrice **diagonalisable** de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ses valeurs propres (non forcément distinctes)

_ si tous les (λ_i) sont **strictement négatifs**, toutes les trajectoires **convergent vers** $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

_ si tous les (λ_i) sont **négatifs ou nuls**, toutes les trajectoires **convergent vers un point d'équilibre** (c'est-à-dire une solution de l'équation $AX = 0$).

_ de manière générale, **une trajectoire converge si et seulement si elle est combinaison linéaire des solutions issues des (λ_i) négatifs ou nuls.**

_ en particulier, si tous les (λ_i) sont strictement positifs, la seule trajectoire qui converge est la trajectoire nulle.

Démonstration :

Soit A une matrice diagonalisable, alors est de la forme $A = PDP^{-1}$, avec P inversible et

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & & \dots \\ \dots & & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \quad (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \text{ étant les valeurs propres de } A, \text{ supposées dans l'ordre croissant.}$$

On a vu que :

_ en posant $X = P.Y$, $X' = AX \Leftrightarrow Y' = DY$

_ le système différentiel $Y' = DY$ a pour solutions :
$$\begin{cases} y_1(t) = a_1 e^{\lambda_1 t} \\ \dots \\ y_n(t) = a_n e^{\lambda_n t} \end{cases}$$

_ $X = PY$, donc $x_1, \dots, x_n$ sont combinaisons linéaires des fonctions $f_1 : t \mapsto e^{\lambda_1 t}, \dots, f_n : t \mapsto e^{\lambda_n t}$

Par exemple, $x_1(t) = b_1 f_1(t) + \dots + b_n f_n(t)$, qui est équivalent au terme non nul avec le plus grand λ_i .
Les différentes situations en découlent.

Exemple :

Soit le système différentiel $X' = AX$, avec $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Est-ce que les trajectoires sont convergentes ?

Les valeurs propres de A sont -1 et 0 (matrice triangulaire supérieure).

$A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et a deux valeurs propres distinctes, donc est diagonalisable.

Les deux valeurs propres sont inférieures ou égales à 0, donc toutes les trajectoires convergent.

3. Résolution avec Python

De la même manière que pour les équations différentielles, on utilisera la fonction **odeint** dans la bibliothèque **scipy.integrate** de la manière suivante : `from scipy.integrate import odeint`

Considérons un système différentiel de la forme : $X' = A.X$,

avec $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \dots & & \dots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$, de conditions initiales $X(0) = \begin{pmatrix} x_{1,0} \\ \dots \\ x_{n,0} \end{pmatrix}$.

On suppose définis :

_ la fonction `systeme` :

```
def systeme(X, t):
```

```
    dx1 = a11*X[0] + ... + a1n*X[n-1]
```

```
    ...
```

```
    dxn = a1n*X[0] + ... + ann*X[n-1]
```

```
    return (np.array([dx1,..., dxn]))
```

_ un vecteur `X0 = np.array([x10,...,xn0])`

_ une liste de valeurs `t = (t0, ..., tp)` : `t = np.arange(a, b, h)`

Alors : **`sol=odeint(systeme, X0, t)`**

renvoie la matrice `sol` de colonnes $y_1, \dots, y_n$ solutions du système différentiel (aux valeurs $t_0, \dots, t_p$).

Dans ce cas, `plt.plot(t,sol)` représente le graphe des différentes coordonnées de la solution (avec `t` en abscisse).

Exemple :

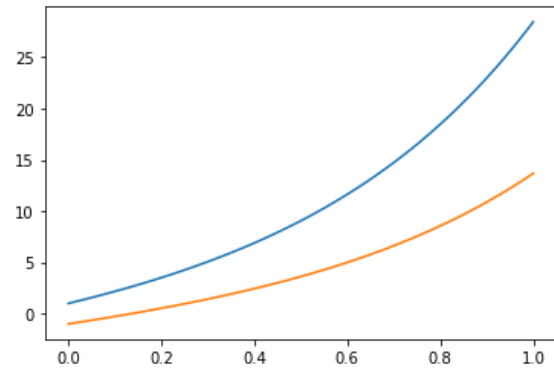
Reprenons le système différentiel $X' = A.X$, avec $A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$, avec les conditions initiales $\begin{cases} x_1(0) = 1 \\ x_2(0) = -1 \end{cases}$.

Représenter la solution sur $[0;1]$ (avec un pas de 0,01)

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import odeint
```

```
def systeme(X,t):
    dx1=5*X[0]-6*X[1]
    dx2=3*X[0]-4*X[1]
    return np.array([dx1,dx2])
```

```
X0=np.array([1,-1])
t = np.arange(0, 1.01, 0.01)
X=odeint(systeme, X0, t)
plt.plot(t,X)
```



Remarque : Par le calcul, on a trouvé : $\begin{cases} x_1(t) = 4e^{2t} - 3e^{-t} \\ x_2(t) = 2e^{2t} - 3e^{-t} \end{cases}$ donc $\begin{cases} x_1(1) = 4e^2 - 3e^{-1} \approx 28,45 \\ x_2(1) = 2e^2 - 3e^{-1} \approx 13,67 \end{cases}$

Les résultats sont cohérents avec le graphe.