Chapitre 21 – Systèmes différentiels - Feuille n°1

Exercice 1

On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$. Résoudre sur $\mathbb{R}$ le système différentiel $X' = A.X$

Exercice 2

Soit $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ -3 & 3 & -2 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ et $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

1) Montrer que 0, 1 et -2 sont valeurs propres de A et déterminer un vecteur propre pour chacune de ces valeurs propres.

2) Montrer alors que A est diagonalisable et déterminer une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que $A = PDP^{-1}$.

3) Soit x_1, x_2, x_3 trois fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose : $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$ et $Y(t) = P^{-1}.X(t)$.

a) Montrer que $X' = AX \Leftrightarrow Y' = DY$.

b) En déduire l'ensemble des solutions de $X' = AX$

4) a) Déterminer l'ensemble des trajectoires qui convergent vers un point d'équilibre. Préciser l'ensemble des points d'équilibre.

b) Déterminer l'ensemble des trajectoires qui convergent vers l'origine.

5) Trouver l'unique solution X vérifiant $X(0) = X_0$.

Exercice 3

On considère le système différentiel linéaire suivant : (S) : $\begin{cases} x'(t) = x(t) + y(t) \\ y'(t) = -2x(t) - 2y(t) \end{cases}$

1. a) Déterminer les valeurs propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$.

b) Montrer que toutes les trajectoires de (S) sont convergentes.

2. Montrer qu'il existe une infinité d'états d'équilibre associés à (S) et les donner.

3. a) Déterminer une base de chacun des sous-espaces propres de A.

b) Résoudre le système (S).

4. Trouver les trajectoires qui convergent vers l'état d'équilibre (2, -2).

5. On considère le système (S_2) suivant : $\begin{cases} x'(t) = x(t) + y(t) - e^{-t} - 1 \\ y'(t) = -2x(t) - 2y(t) + 2e^{t} + e^{-t} + 2 \end{cases}$

Ce système peut également s'écrire $X'(t) = A.X(t) + B(t)$, avec $B(t) = \begin{pmatrix} -e^{-t} - 1 \\ 2e^{t} + e^{-t} + 2 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que $X_0 : t \longmapsto \begin{pmatrix} e^{t} + 1 \\ e^{-t} \end{pmatrix}$ est solution de (S_2).

b) Montrer que $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ est solution de (S_2) si et seulement si $Y(t) = X(t) - X_0(t)$ est solution de (S)

c) En déduire les solutions de (S_2).