Chapitre 21 – Systèmes différentiels – Feuille n°2

Exercice 1 – Cas où la matrice n'est pas diagonalisable

On considère le système différentiel sur $\mathbb{R}$: $\begin{cases} x' = 2x - y \\ y' = 2y \end{cases}$.

1. Justifier que la matrice $T = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable.

2. a) Résoudre l'équation différentielle $y' = 2y$, et en déduire qu'il existe un réel a tel que : $x' - 2x = -a.e^{2t}$.
b) Chercher une solution particulière de cette équation différentielle de la forme $x = b.t.e^{2t}$ (avec $b \in \mathbb{R}$), et en déduire sa solution générale.
Conclusion ?

Exercice 2

On considère le système différentiel $X' = AX$, avec $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Compléter le programme Python suivant pour qu'il résolve ce système et représente les trajectoires pour les valeurs initiales $\begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = -1 \end{cases}$ $\begin{cases} x(0) = -1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x(0) = -1 \\ y(0) = -1 \end{cases}$

```
import numpy as np;import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import odeint

def systeme(X,t):
   …
   …
   return …

plt.xlim(-5, 5);plt.ylim(-5, 5);plt.grid()
L=[np.array([1,1]),np.array([-1,1]),np.array([1,-1]),np.array([-1,-1])]
t = np.arange(0, 1, 0.01)
for X0 in L :
   X=…
   x=list(X[:,0]) ;   y=list(X[:,1])
   plt.plot(x,y)
```

2. On reproduit cette expérience avec les matrices $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

On obtient les trois graphiques suivants.
Quelle matrice correspond à quel graphique ?

Figure 1

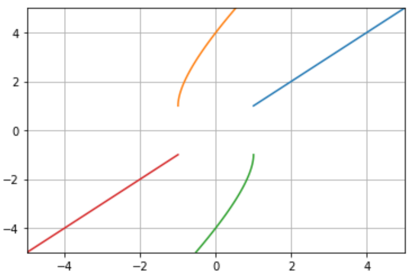

Figure 2

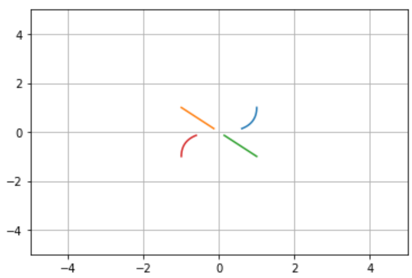

Figure 3