

Partie I. 1) Si $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_p \end{pmatrix}$ alors $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_p^n \end{pmatrix}$

Pour tout $N \in \mathbb{N}, \sum_{n=0}^N \frac{1}{n!} A^n = \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^N \frac{1}{n!} \lambda_1^n & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \sum_{n=0}^N \frac{1}{n!} \lambda_p^n \end{pmatrix}$

Sur la diagonale, on reconnaît la somme partielle de la série exponentielle.

Donc $\forall i \in \{1, \dots, p\} \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\sum_{n=0}^N \frac{1}{n!} \lambda_i^n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \lambda_i^n = \exp(\lambda_i).$

Les autres coefficients sont nuls, donc tendent vers 0.

Donc $\exp(A) = \begin{pmatrix} \exp(\lambda_1) & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \exp(\lambda_p) \end{pmatrix}$. En particulier, on a donc $\exp(0_p) = \begin{pmatrix} \exp(0) & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \exp(0) \end{pmatrix} = I_p.$

2) Remarque : si $a \in \mathbb{R}, \frac{1}{e^a} = e^{-a}$. A-t-on aussi $\exp(A)^{-1} = \exp(-A)$?

$A + (-A) = 0_2$ donc $\exp(A + (-A)) = \exp(0_p)$

A et $-A$ commutent, donc $\exp(A)\exp(-A) = I_p$

Donc $\exp(A)$ est inversible et $\exp(A)^{-1} = \exp(-A)$.

3) $\forall N \in \mathbb{N}, \sum_{n=0}^N \frac{1}{n!} (PAP^{-1})^n = \sum_{n=0}^N \frac{1}{n!} P A^n P^{-1} = P \left(\sum_{n=0}^N \frac{1}{n!} A^n \right) P^{-1}$

$\sum_{n=0}^N \frac{1}{n!} A^n$ converge vers $\exp(A)$ donc $\sum_{n=0}^N \frac{1}{n!} (PAP^{-1})^n$ converge vers $P(\exp(A))P^{-1}$.

Partie II

1. a) $tD = \begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & 2t & 0 \\ 0 & 0 & 2t \end{pmatrix}$ est diagonale, donc $\exp(tD) = \begin{pmatrix} \exp(t) & 0 & 0 \\ 0 & \exp(2t) & 0 \\ 0 & 0 & \exp(2t) \end{pmatrix}$

b) $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_3$ Donc $\forall n \geq 2, N^n = 0$.

Donc $\exp(tN) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} (tN)^n = \frac{1}{0!} (tN)^0 + \frac{1}{1!} (tN)^1 = I_3 + tN = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - 3t & 3t \\ 0 & -3t & 1 + 3t \end{pmatrix}.$

c) $\exp(tB) = \exp(tD + tN)$

$DN = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 6 \\ 0 & -6 & 6 \end{pmatrix}$ $ND = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 6 \\ 0 & -6 & 6 \end{pmatrix}$

Donc les matrices tN et tD commutent.

Donc $\exp(tB) = \exp(tN)\exp(tD)$

$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - 3t & 3t \\ 0 & -3t & 1 + 3t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \exp(t) & 0 & 0 \\ 0 & \exp(2t) & 0 \\ 0 & 0 & \exp(2t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & (1 - 3t)e^{2t} & 3te^{2t} \\ 0 & -3te^{2t} & (1 + 3t)e^{2t} \end{pmatrix}$

$$2) \text{ a) } PBP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -6 & -6 \\ -3 & 6 & 6 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 \\ 0 & 2/3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1/2 & -3 & 5 \\ 0 & 7/3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & -6 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) Le système (E) peut s'écrire } X' = AX, \text{ avec } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & -6 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Donc les solutions sont les vecteurs $X(t) = \exp(tA)X_0$

$$= \exp(tPBP^{-1})X_0 = \exp(P(tB)P^{-1})X_0 = P.\exp(tB)P^{-1}X_0$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 \\ 0 & 2/3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & (1-3t)e^{2t} & 3te^{2t} \\ 0 & -3te^{2t} & (1+3t)e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -6 & -6 \\ -3 & 6 & 6 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 \\ 0 & 2/3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & (1-3t)e^{2t} & 3te^{2t} \\ 0 & -3te^{2t} & (1+3t)e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 \\ 0 & 2/3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2e^t \\ (3-3t)e^{2t} \\ (2-3t)e^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2e^t + (3-3t)e^{2t} \\ -e^t + (2-3t)e^{2t} \\ te^{2t} \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc } \begin{cases} x_1(t) = -2e^t + (3-3t)e^{2t} \\ x_2(t) = -e^t + (2-3t)e^{2t} \\ x_3(t) = te^{2t} \end{cases}$$