

Préambule :

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de matrices de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

On dit que la suite de matrices $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers A si chaque coefficient de A_n converge vers le coefficient correspondant de A .

Par exemple, si $A_n = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{n} & 0 \\ \frac{1}{2^n} & 3 + \frac{2}{n} \end{pmatrix}$, la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

On admet que, pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n!} A^n$ est convergente (c'est-à-dire que la somme partielle converge).

Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, on peut donc définir : $\exp(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} A^n$

On admet que, si $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ commutent, alors $\exp(A + B) = \exp(A) \cdot \exp(B)$.

I. Propriétés de l'exponentielle de matrices.

1) On suppose dans cette question que A est une matrice diagonale. Déterminer $\exp(A)$.

Déterminer en particulier $\exp(0_p)$.

2) En déduire que $\forall A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, $\exp(A)$ est inversible et déterminer son inverse.

3) Soit A et P deux matrices de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. Si P est inversible, montrer que : $\exp(P \cdot A \cdot P^{-1}) = P \cdot \exp(A) \cdot P^{-1}$

II. Résolution d'un système différentielle linéaire

Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et $X_0 \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$. On considère le système différentielle $X' = AX$.

On admet que la solution du système qui vérifie $X(0) = X_0$ est : $X(t) = \exp(tA)X_0$

(on pourra remarquer l'analogie avec les équations différentielles homogènes d'ordre 1)

Exemple :

On cherche à résoudre le système différentiel : (E) :
$$\begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) - 3x_3(t) \\ x_2'(t) = x_1(t) - x_2(t) - 6x_3(t) \\ x_3'(t) = -x_1(t) + 2x_2(t) + 5x_3(t) \end{cases}$$

avec pour « conditions initiales » : $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 1$, $x_3(0) = 0$.

1. On note $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = N + D$.

a) Déterminer $\exp(tD)$.

b) Calculer N^2 et en déduire $\exp(tN)$.

c) Déterminer $\exp(tB)$

2. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 \\ 0 & 2/3 & -1 \end{pmatrix}$. On admet que P est inversible et que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -6 & -6 \\ -3 & 6 & 6 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Calculer $P \cdot B \cdot P^{-1}$.

b) En déduire les solutions de l'équation (E).