

Chapitre 22 – Chaines de Markov

1. Graphes probabilistes

On considère un système qui évolue dans le temps. Ce système peut avoir p états distincts (notés de 1 à p), et est à chaque instant dans un et un seul de ces états.

On étudie son évolution à temps discret (instant 0, instant 1, ...).

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note X_n la variable aléatoire égale au numéro de son état à l'instant n .

(On a donc $X_n(\Omega) = \{1, \dots, p\}$)

On suppose que son **évolution ne dépend que de son état présent, et non de ses états passés, ni du temps déjà écoulé**. Mathématiquement, cela signifie que la loi de X_{n+1} sachant $X_0, \dots, X_n$ ne dépend que de X_n , et ne dépend pas de n . ($\forall i \in \{1, \dots, p\}, \forall j \in \{1, \dots, p\}, P_{(X_n=i)}(X_{n+1}=j)$ ne dépend pas de n)

On dit alors que (X_n) est une **chaîne de Markov homogène**.

On peut représenter la chaîne de Markov par un graphe orienté, dont les sommets sont les états possibles, et dont les flèches d'un sommet à l'autre sont pondérées par les probabilités conditionnelles.

Plus précisément, **l'arête allant du sommet i au sommet j est pondérée par $P_{(X_n=i)}(X_{n+1}=j)$** .

Un tel graphe sera appelé **graphe probabiliste**. (ou diagramme de transition).

Propriété :

Soit G un graphe probabiliste. Alors la somme des poids des arêtes issues d'un sommet est égale à 1.

Démonstration :

$$\begin{aligned} \text{Soit } i \in \{1, \dots, p\}. \sum_{j=1}^p P_{(X_n=i)}(X_{n+1}=j) &= P_{(X_n=i)}\left(\bigcup_{j=1}^p (X_{n+1}=j)\right) \text{ (par incompatibilité)} \\ &= P_{(X_n=i)}(\Omega) = 1 \text{ (une probabilité conditionnelle est une probabilité)} \end{aligned}$$

Remarque :

Attention, la somme des poids des arêtes arrivant à un sommet n'est pas égale à 1.

Exemple :

Un mobile se déplace entre trois points : A, B et C.

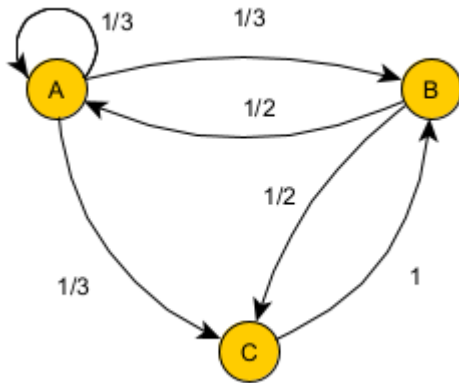
A l'instant 0, il est en A.

S'il est en A à l'instant n, il va aléatoirement en A, B ou C à l'instant suivant.

S'il est en B à l'instant n, il va aléatoirement en A ou C à l'instant suivant.

S'il est en C à l'instant n, il va en B à l'instant suivant.

Diagramme de transition :



Remarques :

_ On appelle **trajectoire** la liste des états successifs du système

_ On dit qu'un état i est **absorbant** si $P_{(X_n=i)}(X_{n+1}=i) = 1$.

C'est un état qu'on ne peut plus quitter.

2 Matrice de transition

Définition :

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une chaîne de Markov homogène à p états.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on appelle **n-ème état probabiliste** le vecteur ligne $V_n = (P(X_n = 1) \dots P(X_n = p))$

Remarque :

Les **coefficients** de ce vecteur sont **tous positifs** (car ce sont des probabilités).

La **somme des coefficients est égale à 1** (car la famille $((X_n = i))_{i \in \{1, \dots, p\}}$ forme un système complet d'événements).

Un vecteur dont les coordonnées sont positives et dont la somme des coordonnées vaut 1 est appelé **vecteur stochastique**.

Définition

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une chaîne de Markov homogène à p états.

On appelle **matrice de transition**, la matrice $M = (m_{i,j})_{1 \leq i \leq j \leq p} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ définie par :

$\forall i \in \{1, \dots, p\}, \forall j \in \{1, \dots, p\}, m_{i,j} = P_{(X_n=i)}(X_{n+1}=j)$

Propriété :

Soit M une matrice de transition. Alors :

– $\forall i \in \{1, \dots, p\}, \forall j \in \{1, \dots, p\}, m_{i,j} \geq 0$

– $\forall i \in \{1, \dots, p\}, \sum_{j=1}^n m_{i,j} = 1$ (La somme des coefficients pour chaque ligne est égale à 1)

Remarques :

– cette formule traduit que la somme des poids des arêtes issues d'un sommet est égale à 1.

– Soit $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq p} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

Si : $\begin{cases} \forall i \in \{1, \dots, p\}, \forall j \in \{1, \dots, p\}, m_{i,j} \geq 0 \\ \forall i \in \{1, \dots, p\}, \sum_{j=1}^n m_{i,j} = 1 \end{cases}$, on dit que M est une **matrice stochastique**.

On peut alors montrer (voir exercice niveau 2) que **1 est une valeur propre de M** , et que **toutes ses valeurs propres sont comprises entre -1 et 1**.

Propriété : **Matrice de transition et formule des probabilités totales**

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une chaîne de Markov homogène à p états.

Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, V_n est le n -ème état probabiliste et M la matrice de transition, alors :

$\forall n \in \mathbb{N}$,

$$V_{n+1} = V_n \cdot M$$

Démonstration :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(X_n = 1), \dots, (X_n = p)$ forment un système complet d'événements, donc d'après la formule des probabilités totales :

$$\forall j \in \{1, \dots, p\} \quad P(X_{n+1} = j) = \sum_{i=1}^p P(X_n = i) P_{(X_n=i)}(X_{n+1} = j).$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } V_n \cdot M &= \begin{pmatrix} P(X_n = 1) & \dots & P(X_n = p) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=1) & \dots & P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=p) \\ \vdots & & \vdots \\ P_{(X_n=p)}(X_{n+1}=1) & \dots & P_{(X_n=p)}(X_{n+1}=p) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^p P(X_n=i) P_{(X_n=i)}(X_{n+1}=1) & \dots & \sum_{i=1}^p P(X_n=i) P_{(X_n=i)}(X_{n+1}=p) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} P(X_{n+1}=1) & \dots & P(X_{n+1}=p) \end{pmatrix} \\ &= V_{n+1} \end{aligned}$$

Remarques :

– on trouve $P(X_{n+1} = j)$ à l'aide des arêtes qui arrivent au sommet j .

– Soit ϕ l'endomorphisme : $\begin{cases} \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R}) \\ X \longmapsto X \cdot M \end{cases}$

Alors la matrice de ϕ dans la base canonique est tM .

Exemple :

Dans l'exemple précédent, notons X_n la variable aléatoire égale à 1 si le mobile est en S_1 à l'instant n , à 2 s'il est en S_2 à l'instant n , et à 3 s'il est en S_3 à l'instant n .

On pose $V_n = (P(X_n = 1) \ P(X_n = 2) \ P(X_n = 3))$.

Déterminer la matrice M telle que $\forall n \in \mathbb{N}, V_{n+1} = V_n.M$

D'après la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(X_n = 1), (X_n = 2), (X_n = 3)$,

$$P(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{3} P(X_n = 1) + \frac{1}{2} P(X_n = 2)$$

$$P(X_{n+1} = 2) = \frac{1}{3} P(X_{n+1} = 1) + P(X_n = 3)$$

$$P(X_{n+1} = 3) = \frac{1}{3} P(X_n = 1) + \frac{1}{2} P(X_n = 2)$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } V_{n+1} &= (P(X_{n+1} = 1) \ P(X_{n+1} = 2) \ P(X_{n+1} = 3)) = (P(X_n = 1) \ P(X_n = 2) \ P(X_n = 3)) \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= V_n.M \text{ avec } M = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Propriété :

Avec les notations précédentes, on a :

$$\forall n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \text{ si } n \geq n_0, \quad V_n = V_{n_0} \cdot M^{n-n_0}$$

Remarques :

- _ Cette propriété se démontre sans difficulté par récurrence sur n .
- _ On notera l'analogie avec les suites géométriques, en portant attention à l'ordre des matrices.
- _ attention, la matrice de transition est à droite !

Ex :

Dans l'exemple précédent, exprimer V_n en fonction de M et n :

On a : $\forall n \in \mathbb{N}, V_n = V_0.M^n$ avec $V_0 = (P(X_0 = 1) \ P(X_0 = 2) \ P(X_0 = 3)) = (1 \ 0 \ 0)$ (car le mobile est en A à l'instant 0).

Remarque :

Si M est une matrice diagonalisable, de valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_p$, il existe une matrice inversible P telle que

$$M = PDP^{-1}, \text{ avec } D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \cdots & \\ 0 & & \lambda_p \end{pmatrix}.$$

$$\text{Dans ce cas } V_n = V_{n_0}.M^{n-n_0} = V_{n_0}.P.D^{n-n_0}.P^{-1}, \text{ avec } D^{n-n_0} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{n-n_0} & & 0 \\ & \cdots & \\ 0 & & \lambda_p^{n-n_0} \end{pmatrix}$$

3. Etats stables

Définition :

Soit une chaîne de Markov de matrice de transition M .

Soit $W^* = (w_1 \dots w_p)$ un vecteur ligne tel que :
$$\begin{cases} \forall i \in \{1, \dots, p\}, w_i \geq 0 \\ \sum_{i=1}^p w_i = 1 \end{cases} \quad (W^* \text{ est un vecteur stochastique})$$

Si $W^* = W^*.M$, on dit que W^* est un **état stable** (ou une **loi stationnaire**) de la chaîne de Markov.

Remarques :

- _ On notera la similitude avec la notion de point fixe.
- _ Si W^* est un état stable et si $X_0 = W^*$, alors $\forall n \in \mathbb{N}, X_n = W^*$.

Propriété :

Soit W^* un état stable de la chaîne de Markov de matrice de transition M .

Alors **${}^tW^*$ est un vecteur propre de la matrice tM associé à la valeur propre 1.**

Démonstration :

$W^* = W^*.M$ donc ${}^t(W^*) = {}^t(W^*.M) \quad {}^t(W^*) = {}^tM.({}^tW^*)$. En posant $Y = {}^tW^*$, on a donc ${}^tM.Y = 1.Y$

De plus, la somme des coefficients étant égale à 1, le vecteur Y est non nul.

Donc c'est un vecteur propre de tM associé à la valeur propre 1.

Remarque :

Pour chercher les états stables :

- _ on résout l'équation $X.M = X$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$
- _ parmi les solutions, on cherche celles dont la somme est égale à 1.
- _ enfin, on vérifie parmi ces solutions si tous les coefficients sont positifs.

Exemple :

Dans l'exercice précédent, déterminer le (ou les) état(s) stable(s)

Si $W^* = (x \ y \ z)$ est un état stable, alors $W^* = W^*.M$

$$(x \ y \ z) \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (x \ y \ z) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y = x \\ \frac{1}{3}x + z = y \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{2}{3}x + \frac{1}{2}y = 0 \\ \frac{1}{3}x - y + z = 0 \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{4}{3}x \\ -x + z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{4}{3}x \\ z = x \end{cases}$$

Les solutions de $W^* = W^*.M$ sont les vecteurs $(x, \frac{4}{3}x, x)$, $x \in \mathbb{R}$.

$$x + y + z = 1 \Leftrightarrow x + \frac{4}{3}x + x = 1 \Leftrightarrow \frac{10}{3}x = 1 \quad x = \frac{3}{10} \quad y = \frac{4}{3} \times \frac{3}{10} = \frac{2}{5} \quad z = \frac{3}{10}.$$

Les coefficients sont tous positifs. Donc le système admet un état stable : $(\frac{3}{10}, \frac{2}{5}, \frac{3}{10})$.

Propriété :

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une chaîne de Markov.

Si (X_n) converge en loi vers une variable aléatoire discrète Y , alors $V = (P(Y=1) \dots P(Y=p))$

est un **état stable** de la chaîne de Markov.

Ebauche de démonstration :

Il est évident que V est un vecteur stochastique.

On pourrait démontrer facilement que l'égalité $V_{n+1} = V_n.M$ se traduit "en passant à la limite" par : $V = V.M$

Donc V est un état stable.

Remarques :

_ On notera l'analogie avec le théorème du point fixe.

_ Dans l'exemple précédent, on peut montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, P(X_n = 1) = \frac{3}{10} - \frac{1}{20} \left(-\frac{2}{3}\right)^n, P(X_n = 2) = \frac{2}{5} + \frac{1}{10} \left(-\frac{2}{3}\right)^n, P(X_n = 3) = \frac{3}{10} - \frac{1}{20} \left(-\frac{2}{3}\right)^n.$$

$$\text{Comme } -1 < -\frac{2}{3} < 1, \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{2}{3}\right)^n = 0 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n = 1) = \frac{3}{10}, \lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n = 2) = \frac{2}{5}, \lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n = 3) = \frac{3}{10}.$$

$$\text{Donc } (X_n) \text{ converge en loi vers } Y \text{ de loi : } P(Y=1) = \frac{3}{10}, P(Y=2) = \frac{2}{5}, P(Y=3) = \frac{3}{10}.$$

On retrouve bien l'état stable de la chaîne de Markov.