# Chapitre 22 : Exercices niveau 2 - Correction

1) $MU = \begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & \dots & m_{1,n} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & \dots & m_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_{n,1} & m_{n,2} & \dots & m_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{1,1} + m_{1,2} + \dots + m_{1,n} \\ m_{2,1} + m_{2,2} + \dots + m_{2,n} \\ \dots \\ m_{n,1} + m_{n,2} + \dots + m_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix} = U$

$U \neq 0$ et $MU = 1.U$ donc U est un vecteur propre de M de valeur propre 1.

Donc 1 est valeur propre de M.

2) a) X est un vecteur propre, donc X est non nul.

Donc une de ces coordonnées au moins est non nulle.

Donc au moins un des $|x_i|$ est strictement positif. Donc $\max_{1\leq i \leq n} (|x_i|) > 0$.    $|x_k| > 0$.

b) On a $MX = \lambda X$    $\begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & \dots & m_{1,n} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & \dots & m_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_{n,1} & m_{n,2} & \dots & m_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} m_{1,1}x_1 + m_{1,2}x_2 + \dots + m_{1,n}x_n = \lambda x_1 \\ m_{2,1}x_1 + m_{2,2}x_2 + \dots + m_{2,n}x_n = \lambda x_2 \\ \dots \\ m_{n,1}x_1 + m_{n,2}x_2 + \dots + m_{n,n}x_n = \lambda x_n \end{cases}$$

En particulier $m_{k,1}x_1 + m_{k,2}x_2 + \dots + m_{k,k}x_k + \dots + m_{k,n}x_n = \lambda x_k$;

$\lambda x_k = \sum_{i=1}^{n} m_{k,i}x_i$ donc $|\lambda x_k| \leq \sum_{i=1}^{n} |m_{k,i}x_i|$    $|\lambda x_k| \leq \sum_{i=1}^{n} m_{k,i}|x_i|$ (car coeff. positifs)

Or $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ $|x_i| \leq |x_k|$ donc $\sum_{i=1}^{n} \left(m_{k,i}|x_i|\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \left(m_{k,i}|x_k|\right) = |x_k| \sum_{i=1}^{n} m_{k,i} = |x_k|$

Donc $|\lambda||x_k| \leq |x_k|$

En divisant par $|x_k| > 0$ : $|\lambda| \leq 1$.

3) a) Si $A \in \mathcal{S}_n$ et $B \in \mathcal{S}_n$, alors $AB = (c_{i,j})$ avec $\forall i \in \{1,..,n\}$, $\forall j \in \{1,.., n\}$, $c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,j}$.

$\forall k \in \{1, \dots, n\}$, $a_{i,k} \geq 0$ et $b_{k,j} \geq 0$ donc $a_{i,k}b_{k,j} \geq 0$ donc $c_{i,j} \geq 0$.

$\forall i \in \{1,.., n\}$, $\sum_{j=1}^{n} c_{i,j} = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,j}\right) = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,k}b_{k,j}\right) = \sum_{k=1}^{n} \left(a_{i,k} \left(\sum_{j=1}^{n} b_{k,j}\right)\right) = \sum_{k=1}^{n} (a_{i,k} \times 1) = 1$

Donc $AB \in \mathcal{S}_n$.

b) Par récurrence sur p :

_ pour p = 0 : $A^0 = I_n$   Or $I_n \in \mathcal{S}_n$ (coefficients positifs, somme des colonnes = 1) donc $A^0 \in \mathcal{S}_n$.

_ supposons que $A^p \in \mathcal{S}_n$ :

Comme A et $A^p$ appartiennent à $\mathcal{S}_n$, d'après la question a), $A \times A^p \in \mathcal{S}_n$   $A^{p+1} \in \mathcal{S}_n$.

Donc $\forall p \in \mathbb{N}$, $A^p \in \mathcal{S}_n$.