

Rappel : Si $A = (a_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B = (b_{i,j})_{1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq q} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, alors $C = AB$ est la matrice de $\mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{R})$ telle que : $\forall i \in \{1, \dots, n\}, \forall j \in \{1, \dots, q\}, c_{i,j} = \sum_{k=1}^p a_{i,k} b_{k,j}$.

Exercice – Les matrices stochastiques

Rappel :

Soit $n \geq 1$. Soit $M = (m_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On dit que M est stochastique si :
$$\begin{cases} \forall (i,j) \in \{1, \dots, n\}^2, m_{i,j} \geq 0 \\ \forall i \in \{1, \dots, n\}, \sum_{j=1}^n m_{i,j} = 1 \end{cases}.$$

On appelle $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des matrices stochastiques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1) On note $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

Soit $M \in \mathcal{S}_n$. Calculer MU . En déduire une valeur propre de M .

2) Soit $M \in \mathcal{S}_n$ et soit λ une valeur propre de M et X un vecteur propre associé à λ .

Notons $X = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$. Soit k l'indice du coefficient dont la valeur absolue est la plus grande :

$$|x_k| = \max_{1 \leq i \leq n} (|x_i|).$$

a) Montrer que $|x_k| > 0$.

b) Montrer que $\lambda x_k = \sum_{i=1}^n m_{k,i} x_i$

c) En déduire que $|\lambda x_k| \leq |x_k|$ puis que $|\lambda| \leq 1$.

3) a) Montrer que si $A \in \mathcal{S}_n$ et $B \in \mathcal{S}_n$, alors $AB \in \mathcal{S}_n$.

b) Montrer que si $A \in \mathcal{S}_n$, alors $\forall p \in \mathbb{N}, A^p \in \mathcal{S}_n$