Exercice 1

Partie I – Etude d'une matrice

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ et $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- 1) Calculer MU et en déduire une valeur propre de M .
- 2) Montrer que $-\frac{1}{6}$ et $\frac{1}{2}$ sont aussi des valeurs propres de M .
- 3) En déduire qu'il existe une matrice D diagonale et une matrice P inversible telles que $M = PDP^{-1}$. Préciser les coefficients de la matrice D . (On choisira D avec des coefficients diagonaux croissants).

On admettra dans la suite que $P = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -4 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ convient, et qu'alors $P^{-1} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 7 & 0 & -7 \\ 4 & 6 & 4 \end{pmatrix}$.

Partie II – Etude d'une chaîne de Markov

Un mobile se déplace entre trois points A, B, C de la manière suivante :

Au départ, il est en A.

- _ S'il est en A, il reste en A ou va en B avec la même probabilité.
- _ S'il est en B, il va aléatoirement en A, B ou C.
- _ S'il est en C, il reste en C ou va en B avec la même probabilité.

Soit X_n la variable aléatoire égale à 1 (respectivement à 2, à 3) si le mobile est en A (en B, en C) après n étapes.

Notons $V_n = (P(X_n = 1) \ P(X_n = 2) \ P(X_n = 3))$.

- 1) Déterminer le diagramme de transition de cette chaîne de Markov.
- 2) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, V_{n+1} = V_n \cdot M$
- 3) a) Ecrire un programme Python qui calcule et affiche les valeurs de $V_1, \dots, V_{10}$.
- b) Le résultat obtenu est :

[0.5 0.5 0.]

[0.41666667 0.41666667 0.16666667]

[0.34722222 0.43055556 0.22222222]

[0.31712963 0.42824074 0.25462963]

[0.30131173 0.42862654 0.27006173]

[0.29353138 0.42856224 0.27790638]

[0.28961977 0.42857296 0.28180727]

[0.28766754 0.42857117 0.28376129]

[0.28669083 0.42857147 0.2847377]

[0.28620257 0.42857142 0.28522601]

Semble-t-il y avoir un état stable ? La suite de variables aléatoires (X_n) semble-t-elle converger en loi ?

- 4) a) Montrer par le calcul qu'il existe un état stable, et le déterminer.
- b) Déterminer l'expression de $P(X_n = 1)$, $P(X_n = 2)$ et $P(X_n = 3)$ en fonction de n .
- c) Montrer que la suite (X_n) converge en loi vers cette loi stationnaire.