Chapitre 22 – Chaines de Markov

1. Graphe probabiliste

On considère un système qui évolue dans le temps. Ce système peut avoir p états distincts (notés de 1 à p), et est à chaque instant dans un et un seul de ces états.
On étudie son évolution à temps discret (instant 0, instant 1, …).
Pour $n \in \mathbb{N}$, on note X_n la variable aléatoire égale au numéro de son état à l'instant n.
(On a donc $X_n(\Omega) = \{1, \ldots, p\}$)
On suppose que son **évolution ne dépend que de son état présent, et non de ses états passés, ni du temps déjà écoulé**. Mathématiquement, cela signifie que la loi de **X_{n+1} sachant $X_0, \ldots, X_n$ ne dépend que de X_n, et ne dépend pas de n.** ($\forall i \in \{1, \ldots, p\}, \forall j \in \{1, \ldots, p\}, P_{(X_n = i)}(X_{n+1} = j)$ ne dépend pas de n)

On dit alors que (X_n) est une **chaine de Markov homogène**.

On peut représenter la chaine de Markov par un graphe orienté, dont les sommets sont les états possibles, et dont les flèches d'un sommet à l'autre sont pondérées par les probabilités conditionnelles.
Plus précisément, **l'arête allant du sommet i au sommet j est pondérée par $P_{(X_n = i)}(X_{n+1} = j)$**.

Un tel graphe sera appelé **graphe probabiliste**. (ou diagramme de transition).

Propriété :

Soit G un graphe probabiliste. Alors la somme des poids des arêtes issues d'un sommet est égale à 1.

Démonstration :

Soit $i \in \{1, \ldots, p\}$. $\sum_{j=1}^{p} P_{(X_n = i)}(X_{n+1} = j) = P_{(X_n=i)}\left(\bigcup_{j=1}^{p} (X_n = j)\right)$ (par incompatibilité)

$= P_{(X_n = i)}(\Omega) = 1$ (une probabilité conditionnelle est une probabilité)

Remarque :
Attention, la somme des poids des arêtes arrivant à un sommet n'est pas égale à 1.

Exemple :
Un mobile se déplace entre trois points : A, B et C.
A l'instant 0, il est en A.
S'il est en A à l'instant n, il va aléatoirement en A, B ou C à l'instant suivant.
S'il est en B à l'instant n, il va aléatoirement en A ou C à l'instant suivant.
S'il est en C à l'instant n, il va en B à l'instant suivant.

Diagramme de transition :

Remarques :
_ On appelle **trajectoire** la liste des états successifs du système
_ On dit qu'un **état** i est **absorbant** si $\mathbf{P_{(X_n = i)}(X_{n+1} = i) = 1}$.
C'est un état qu'on ne peut plus quitter.

2. Matrice de transition

Définition :

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une chaine de Markov homogène à p états.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on appelle **n-ème état probabiliste** le vecteur ligne $\mathbf{V_n = \left(P(X_n = 1) \ \ \dots \ \ P(X_n = p) \right)}$

Remarque :
Les **coefficients** de ce vecteur sont **tous positifs** (car ce sont des probabilités).
La **somme des coefficients est égale à 1** (car la famille $\left((X_n = i)\right)_{i \in \{1,\dots,p\}}$ forme un système complet d'événements.
Un vecteur dont les coordonnées sont positives et dont la somme des coordonnées vaut 1 est appelé **vecteur stochastique**.

Définition

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une chaine de Markov homogène à p états.
On appelle **matrice de transition**, la matrice $M = (m_{i,j})_{1\leq i\leq j} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ définie par :
$\forall\, i \in \{1, \dots, p\}, \forall\, i \in \{1, \dots, p\}$, $\mathbf{m_{i,j} = P_{(X_n=i)}(X_{n+1} = j)}$

Propriété :

Soit M une matrice de transition. Alors :
_ $\forall$ i $\in$ {1, …, p}, $\forall$ i $\in$ {1, …, p}, $\mathbf{m_{i,j} \geq 0}$
_ $\forall$ i $\in$ {1, …, p}, $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \mathbf{m_{i,j} = 1}$ (La somme des coefficients pour chaque ligne est égale à 1)

Remarques :
_ cette formule traduit que la somme des poids des arêtes issues d'un sommet est égale à 1.
_ Soit $M = (m_{i,j})_{1\leq i\leq j} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

Si : $\begin{cases} \forall i \in \{1, \dots, p\}, \forall i \in \{1, \dots, p\}, m_{i,j} \geq 0 \\ \forall i \in \{1, \dots, p\}, \displaystyle\sum_{j=1}^{n} m_{i,j} = 1 \end{cases}$, on dit que M est une **matrice stochastique**.

On peut alors montrer (voir exercice niveau 2) que **1 est une valeur propre de M**, et que **toutes ses valeurs propres sont comprises entre -1 et 1**.

Propriété : **Matrice de transition et formule des probabilités totales**

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une chaine de Markov homogène à p états.
Si pour tout n $\in \mathbb{N}$, V_n est le n-ème état probabiliste et M la matrice de transition, alors :
$\forall$ n $\in \mathbb{N}$,

$$\mathbf{V_{n+1} = V_n.M}$$

Démonstration :
Pour tout n $\in \mathbb{N}$, $(X_n = 1)$, …., $(X_n = p)$ forment un système complet d'événements, donc d'après la formule des probabilités totales :

$\forall j \in \{1, \dots, p\}$ $\displaystyle \mathbf{P(X_{n+1}= j) = \sum_{i=1}^{p} P(X_n= i)P_{(X_n= i)}(X_{n+1} = j).}$

Donc $V_n.M = \begin{pmatrix} P(X_n = 1) & \dots & P(X_n = p) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{(X_n = 1)}(X_{n+1} = 1) & \dots & P_{(X_n = 1)}(X_{n+1} = p) \\ \dots & & \dots \\ P_{(X_n = p)}(X_{n+1} = 1) & \dots & P_{(X_n = p)}(X_{n+1} = p) \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{i=1}^{p} P(X_n= i)P_{(X_n= i)}(X_{n+1} = 1) & \dots & \displaystyle\sum_{i=1}^{p} P(X_n= i)P_{(X_n= i)}(X_{n+1} = p) \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} P(X_{n+1} = 1) & \dots & P(X_{n+1} = p) \end{pmatrix}$

$= V_{n+1}$

Remarques :
_ on trouve $P(X_{n+1} = j)$ à l'aide des arêtes qui arrivent au sommet j.
_ Soit φ l'endomorphisme : $\begin{cases} \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R}) \\ X \longmapsto X.M \end{cases}$

Alors la matrice de φ dans la base canonique est ${}^tM$.

Exemple :

Dans l'exemple précédent, notons X_n la variable aléatoire égale à 1 si le mobile est en A à l'instant n, à 2 s'il est en B à l'instant n, et à 3 s'il est en C à l'instant n.

On pose $V_n = \left(P(X_n = 1) \quad P(X_n = 2) \quad P(X_n = 3) \right)$.

Déterminer la matrice M telle que $\forall n \in \mathbb{N}, V_{n+1} = V_n.M$

Propriété :

Avec les notations précédentes, on a :

$\forall n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}$, si $n \geq n_0$, $\quad \mathbf{V_n = V_{n_0}.M^{n-n_0}}$

Remarques :

_ Cette propriété se démontre sans difficulté par récurrence sur n.

_ On notera l'analogie avec les suites géométriques, en portant attention à l'ordre des matrices.

_ attention, la matrice de transition est à droite !

Ex :

Dans l'exemple précédent, exprimer V_n en fonction de M et n :

Remarque :
Si M est une matrice diagonalisable, de valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$, il existe une matrice inversible P telle que $M = PDP^{-1}$, avec $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ldots & \\ 0 & & \lambda_p \end{pmatrix}$.

Dans ce cas $\mathbf{V_n = V_{n0}.M^{n-n_0} = V_{n0}.P.D^{n-n_0}P^{-1}}$, avec $\mathbf{D^{n-n_0}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\lambda_1^{n-n_0}} & & \mathbf{0} \\ & \boldsymbol{\ldots} & \\ \mathbf{0} & & \boldsymbol{\lambda_p^{n-n_0}} \end{pmatrix}$

3. Etats stables

Définition :

Soit une chaine de Markov de matrice de transition M.

Soit $W^* = (w_1 \ldots w_p)$ un vecteur ligne tel que : $\begin{cases} \forall i \in \{1, \ldots, p\},\ w_i \geq 0 \\ \sum\limits_{i=1}^{p} w_i = 1 \end{cases}$ *(W* est un vecteur stochastique)*

Si $\mathbf{W^* = W^*.M}$, on dit que W* est un **état stable** (ou une **loi stationnaire**) de la chaine de Markov.

Remarques :
_ On notera la similitude avec la notion de point fixe.
_ Si W* est un état stable et si $X_0 = W^*$, alors $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $X_n = W^*$.

Propriété :

Soit W* un état stable de la chaine de Markov de matrice de transition M.
Alors $\mathbf{{}^tW^*}$ **est un vecteur propre de la matrice** $\mathbf{{}^tM}$ **associé à la valeur propre 1**.

Démonstration :
$W^* = W^*.M$ donc ${}^t(W^*) = {}^t(W^*.M)$ ${}^t(W^*) = {}^tM.({}^tW^*)$. En posant $Y = {}^tW^*$, on a donc ${}^tM.Y = 1.Y$
De plus, la somme des coefficients étant égale à 1, le vecteur Y est non nul.
Donc c'est un vecteur propre de ${}^tM$ associé à la valeur propre 1.

Remarque :
Pour chercher les états stables :
_ on résout l'équation X.M = X, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$
_ parmi les solutions, on cherche celles dont la somme est égale à 1.
_ enfin, on vérifie parmi ces solutions si tous les coefficients sont positifs.

Exemple : Dans l'exercice précédent, déterminer le (ou les) état(s) stable(s)

Propriété :

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une chaine de Markov.
Si (X_n) converge en loi vers une variable aléatoire discrètes Y, alors $V = \begin{pmatrix} P(Y = 1) & \dots & P(Y = p) \end{pmatrix}$ est un **état stable** de la chaine de Markov.

Ebauche de démonstration :
Il est évident que V est un vecteur stochastique.
On pourrait démontrer facilement que l'égalité $V_{n+1} = V_n.M$ se traduit "en passant à la limite" par : $V = V.M$
Donc V est un état stable.

Remarque : On notera l'analogie avec le théorème du point fixe.

Exemple : Dans l'exemple précédent, on peut montrer que :
$\forall n \in \mathbb{N}$, $P(X_n = 1) = \dfrac{3}{10} - \dfrac{1}{20}\left(-\dfrac{2}{3}\right)^n$, $P(X_n = 2) = \dfrac{2}{5} + \dfrac{1}{10}\left(-\dfrac{2}{3}\right)^n$, $P(X_n = 3) = \dfrac{3}{10} - \dfrac{1}{20}\left(-\dfrac{2}{3}\right)^n$.
Montrer que (X_n) converge en loi vers une variable aléatoire Y, qui est un état stable.