Exercice 1

1) Par linéarité de l'espérance, $E(\overline{X_n}) = \frac{1}{n}(E(X_1) + \ldots + E(X_n)) = \frac{1}{n} \times n \times m = m$.

$V(\overline{X_n}) = \frac{1}{n^2} V(X_1 + \ldots + X_n) = \frac{1}{n^2}(V(X_1) + \ldots + V(X_n))$ (par indépendance) $= \frac{1}{n^2}(n \times \sigma^2) = \frac{\sigma^2}{n}$.

donc $E(\overline{X_n}^2) = V(\overline{X_n}) + E(\overline{X_n})^2 = \frac{\sigma^2}{n} + m^2$.

2) a) $V_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \overline{X_n})^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k^2 - 2X_k\overline{X_n} + \overline{X_n}^2) = \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k^2 - \sum_{k=1}^{n} 2X_k\overline{X_n} + \sum_{k=1}^{n}\overline{X_n}^2\right)$

$= \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k^2 - 2\overline{X_n}\sum_{k=1}^{n} X_k + \sum_{k=1}^{n}\overline{X_n}^2\right) = \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k^2 - 2\overline{X_n}\, n\overline{X_n} + n\overline{X_n}^2\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k^2 - \overline{X_n}^2$

car $\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ donc $\sum_{k=1}^{n} X_k = n\overline{X_n}$

b) $E(X_k^2) = V(X_k) + E(X_k)^2 = \sigma^2 + m^2$

Par linéarité, $E(V_n) = \frac{1}{n} E\left(\sum_{k=1}^{n} X_k^2\right) - E(\overline{X_n}^2) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E(X_k^2) - E(\overline{X_n}^2)$

$= \frac{1}{n} \times n \times (\sigma^2 + m^2) - \left(\frac{\sigma^2}{n} + m^2\right)$

$= \sigma^2 + m^2 - \frac{\sigma^2}{n} - m^2 = \frac{n-1}{n}\sigma^2$.

c) Soit $W_n = \frac{n}{n-1} V_n = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \overline{X_n})^2$

alors $E(W_n) = \frac{n}{n-1} E(V_n) = \frac{n}{n-1}\frac{n-1}{n}\sigma^2 = \sigma^2$.

d)
```
m=np.mean(x)
variance=np.sum((x-m)**2)/(n – 1)
```

Exercice 2

1) $(T_n - \theta)^2 = (T_n - E(T_n) + E(T_n) - \theta)^2 = \big((T_n - E(T_n)) + b(T_n)\big)^2$
$= (T_n - E(T_n))^2 + b(T_n)^2 + 2(T_n - E(T_n)b(T_n)$
T_n admet une espérance et une variance, donc $(T_n - \theta)^2$ admet une espérance et :
Donc $E\big((T_n - \theta)^2\big) = E\big((T_n - E(T_n))^2\big) + E(b(T_n)^2) + 2b(T_n)E\big(T_n - E(T_n)\big)$
$= V(T_n) + b(T_n)^2 + 2b(T_n)(E(T_n) - E(T_n))$
$= V(T_n) + b(T_n)^2$

2) La variable aléatoire $(T_n - \theta)^2$ est à valeurs positives et admet une espérance, donc d'après l'inégalité de Markov : $\forall a > 0,\ P\big((T_n - \theta)^2 \geq a\big) \leq \frac{E\big((T_n - \theta)^2\big)}{a}$

Avec $a = \varepsilon^2$: $P\big((T_n - \theta)^2 \geq \varepsilon^2\big) \leq \frac{E\big((T_n - \theta)^2\big)}{\varepsilon^2}$ $\quad P\big(|T_n - \theta| \geq \varepsilon\big) \leq \frac{r(T_n)}{\varepsilon^2}$

6) Si $b(T_n) = 0$, $r(T_n) = V(T_n)$, donc $\forall \varepsilon > 0$, $0 \leq P\big(|T_n - \theta| \geq \varepsilon\big) \leq \frac{V(T_n)}{\varepsilon^2}$.

$\lim_{n \to +\infty} \frac{V(T_n)}{\varepsilon^2} = 0$, donc par encadrement $\lim_{n \to +\infty} P\big(|T_n - \theta| \geq \varepsilon\big) = 0$.