Chapitre 23 – Estimateurs – Exercices niveau 2

Exercice 1 – Estimation de la variance

Soit n un entier tel que $n \geq 2$. On considère $X_1, \ldots, X_n$ des variables mutuellement indépendantes de même loi, admettant une espérance m, et une variance σ^2, avec $\sigma > 0$. On suppose que m est connu.

On rappelle que la moyenne empirique est définie par : $\overline{X_n} = \dfrac{X_1 + \ldots + X_n}{n}$

et que la variance empirique est définie par : $V_n = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (X_k - \overline{X_n})^2$

1. Déterminer $E\left(\overline{X_n}\right)$ et $E\left(\overline{X_n}^2\right)$.

2) a) Montrer que : $V_n = \dfrac{1}{n}\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k^2\right) - \overline{X_n}^2$

b) En déduire que $E(V_n) = \dfrac{n-1}{n} \sigma^2$.

c) Construire, à partir de V_n, un estimateur d'espérance σ^2.

d) En Python, on suppose que :

_ `x` est un vecteur de taille n contenant les résultats de $X_1, \ldots, X_n$,

_ `n` contient la valeur de n.

Ecrire un programme qui permet de calculer une estimation de σ^2.

Exercice 2

Soit θ un nombre réel et (T_n) un estimateur de θ. On suppose que (T_n) admet une espérance et une variance.

On appelle biais de l'estimateur T_n le nombre $b(T_n) = E(T_n) - \theta$.

Si $b(T_n) = 0$, on dit que l'estimateur est sans biais.

On appelle risque quadratique de T_n le nombre $r(T_n) = E\left((T_n - \theta)^2\right)$.

1) Montrer que $r(T_n) = b(T_n)^2 + V(T_n)$.

2) A l'aide de l'inégalité de Markov, montrer que : $\forall\, \varepsilon > 0$, $P\left(\left|T_n - \theta\right| \geq \varepsilon\right) \leq \dfrac{r(T_n)}{\varepsilon^2}$.

3) On suppose dans cette question que (T_n) est un estimateur sans biais et que $\lim\limits_{n \to +\infty} V(T_n) = 0$.

Montrer que $\forall\, \varepsilon > 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} P\left(\left|T_n - \theta\right| \geq \varepsilon\right) = 0$ *(On dira que l'estimateur est convergent)*