Exercice

Soit T une V.A.R. dont une densité de probabilité est f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x}{R^2} \text{ si } 0 \leq x \leq R \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$ où R est un réel strictement positif inconnu.

1) a) Vérifier que f est bien une densité de probabilité.

b) Montrer que T admet une espérance et une variance que l'on calculera.

2) Soit T_1, …., T_n une famille de n V.A.R. indépendantes de même loi que T.

Pour $n \geq 1$, on pose $X_n = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} T_i$

a) Montrer que X_n est un estimateur de R.

b) Calculer $E(X_n)$ et $V(X_n)$. X_n est-il un bon estimateur de R ?

c) Déterminer un réel λ tel que $X_n' = \lambda X_n$ vérifie : $E(X_n') = R$.

Dans la suite de l'exercice, on conservera cette valeur de λ.

d) Déterminer $V(X_n')$. X_n' est-il un bon estimateur de R ?

e) (Python). On suppose que `t` est un vecteur contenant n réalisations de la variable aléatoire T. Proposer une instruction qui calcule une estimation de R.

3. a) On considère un nombre $\varepsilon > 0$ donné. Montrer que $P(|X_n' - R| \leq \varepsilon) \geq 1 - \dfrac{R^2}{8n\varepsilon^2}$

b) On suppose dans cette question que $R \in [0;2]$.

Montrer que l'intervalle $\left[X_n' - \sqrt{\dfrac{10}{n}} ; X_n' + \sqrt{\dfrac{10}{n}}\right]$ est un intervalle de confiance de R au niveau de confiance 0,95.