Chapitre 23 : Estimation – Feuille n°2

Exercice 1

Soit λ un réel strictement positif inconnu. On suppose que $1 \leq \lambda \leq 5$.
On considère une suite $(X_n)_{n \geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes de même loi de Poisson de paramètre λ. Pour tout $n \geq 1$, on note $S_n = X_1 + \ldots + X_n$.
1) Déterminer la loi de S_n, $E(S_n)$, $V(S_n)$.
2) Pour n grand, on considère qu'on peut approcher S_n par une variable aléatoire T_n qui suit une loi normale. Préciser les paramètres de cette loi.
Dans la suite, on considèrera que S_n suit la même loi que T_n.
3) a) A l'aide du tableau, déterminer les valeurs de x qui vérifient $\Phi(x) - \Phi(-x) \geq 0,99$.
b) Montrer que $\lambda \in \left[\frac{S_n}{n} - 0,1, \frac{S_n}{n} + 0,1\right] \Leftrightarrow -0,1n \leq S_n - n\lambda \leq 0,1n$
c) Montrer que $P(-0,1n \leq S_n - n\lambda \leq 0,1n) = \Phi\left(\frac{0,1\sqrt{n}}{\sqrt{\lambda}}\right) - \Phi\left(\frac{-0,1\sqrt{n}}{\sqrt{\lambda}}\right)$.
d) A partir de quelle valeur de n est-on certain que l'intervalle $\left[\frac{S_n}{n} - 0,1, \frac{S_n}{n} + 0,1\right]$ est un intervalle de confiance de λ avec un risque d'erreur inférieur à 1% ?
(En plus) 4) a) Soit $\alpha_0 \in\ ]0;1]$. Montrer qu'il existe un unique $t_0 \in [0; +\infty[$ tel que $\Phi(t_0) = 1 - \frac{\alpha_0}{2}$.
b) Montrer que $P\left(\frac{S_n}{n} - \frac{t_0\sqrt{\lambda}}{\sqrt{n}} \leq \lambda \leq \frac{S_n}{n} + \frac{t_0\sqrt{\lambda}}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha_0$
c) Montrer que l'intervalle $\left[\frac{S_n}{n} - \frac{\sqrt{5}t_0}{\sqrt{n}}, \frac{S_n}{n} + \frac{\sqrt{5}t_0}{\sqrt{n}}\right]$ est un intervalle de confiance de λ au niveau de confiance $1 - \alpha_0$.

Exercice 2

Soit α un réel strictement positif. Par définition, on dit qu'une variable aléatoire X suit la loi de Pareto de paramètres α et 2 si X admet pour densité la fonction : $f_\alpha(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 2 \\ \frac{\alpha 2^\alpha}{x^{\alpha+1}} \text{ si } x \geq 2 \end{cases}$.
Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi de Pareto de paramètres α et 2.
On se propose d'estimer la valeur de α par la méthode dite "du maximum de vraisemblance".
Pour cela, n étant un entier naturel non nul et $x_1, \ldots, x_n$ des réels strictement supérieurs à 2, on introduit la fonction L, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et définie sur $]0; +\infty[$ par : $L(\alpha) = \prod_{k=1}^{n} f_\alpha(x_k)$.
1. Exprimer $L(\alpha)$ puis $\ln(L(\alpha))$ en fonction de $\alpha, x_1, \ldots, x_n$.
2. a) On pose $s_n = \sum_{k=1}^{n} \ln(x_k)$. Montrer que $s_n > n.\ln(2)$
b) On considère la fonction φ, définie pour tout réel a de $]0; +\infty[$ par :
$\varphi(a) = n.\ln(a) + n.a.\ln(2) - (a + 1)s_n$.
Montrer que la fonction φ admet un maximum, atteint en un seul réel que l'on notera w.
c) Exprimer w en fonction de $x_1, \ldots, x_n$. Que peut-on dire de w pour la fonction L ?