Chapitre 3 : Les suites

1. Démonstration par récurrence

Propriété :

Soit P_n une proposition qui dépend d'un entier naturel n telle que :
_ **P_0 est vraie** (initialisation)
_ **si on suppose P_n vraie à un rang n quelconque** (hypothèse de récurrence), alors **P_{n+1} est vraie** (hérédité)
Alors **pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est vraie**

Remarques :
_ la récurrence s'utilise pour montrer une **propriété** (égalité, inégalité, …) **qui dépend d'un entier n** et qui est **donnée dans l'énoncé** (ou par conjecture).
(question du type : "Montrer que, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, ….)
_ Pour faire une démonstration par récurrence, il est nécessaire d'avoir **au préalable** une **relation de récurrence** (lien entre les rangs n et n+1) :
Ex : $u_{n+1} = f(u_n)$, $x^{n+1} = x^n \times x$, $(n + 1)! = n! \times (n + 1)$, si $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$, $S_{n+1} = S_n + u_{n+1}$…
_ en général, **une relation de récurrence ne se montre pas par récurrence** (sauf pour montrer qu'une suite est croissante ou décroissante).
_ pour l'initialisation, dans le cas d'une égalité ou d'une inégalité, étudier **séparément les deux membres**.
_ pour une question du type "Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geq$ …", il faut montrer les deux parties dans la même récurrence. (**principaux problèmes d'existence : quotient, racine carrée, ln**)

Exemples :

1) Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_1 = 1 \\ \forall\, n \geq 1,\ u_{n+1} = u_n + 2 + \dfrac{1}{u_n^2} \end{cases}$
Montrer que : $\forall\, n \geq 1$, $u_n \geq 2n - 1$

On procède par récurrence :
_ pour n = 1 : $u_1 = 1$ $2\times1 - 1 = 1$ $1 \geq 1$ donc vrai au rang 1
_ supposons qu'à un rang n : $u_n \geq 2n - 1$ alors $u_n + 2 + \dfrac{1}{u_n^2} \geq 2n - 1 + 2 + \dfrac{1}{u_n^2} \geq 2n + 1$
Donc $u_{n+1} \geq 2(n + 1) - 1$
Conclusion : $\forall\, n \geq 1$, $u_n \geq 2n - 1$

2) Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \ln(u_n) + 1 \end{cases}$

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geq 1$.

On procède par récurrence :

_ pour $n = 0$: $u_0 = 2$ donc u_0 existe et $u_0 \geq 1$.

_ supposons qu'à un rang n, u_n existe et $u_n \geq 1$:

 _ $u_n \geq 1$ donc $u_n > 0$ donc u_{n+1} existe

 _ $u_n \geq 1$ donc $\ln(u_n) \geq 0$ $u_{n+1} \geq 1$.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geq 1$.

2. Généralités sur les suites

2.1 Les suites usuelles

Définition – Propriété :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle.

_ S'il existe un réel r tel que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{u_{n+1} = u_n + r}$, alors on dit que (u_n) est une **suite arithmétique de raison r**.

Dans ce cas, on a : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}$, $\mathbf{u_n = u_0 + nr}$ $\mathbf{u_n = u_p + (n - p)r}$.

_ S'il existe un réel $q \neq 0$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{u_{n+1} = u_n \times q}$, on dit que (u_n) est une suite **géométrique de raison q**.

Dans ce cas, on a : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}$, $\mathbf{u_n = u_0 \times q^n}$ $\mathbf{u_n = u_p \times q^{n-p}}$

_ S'il existe deux réels a ($\neq 0$ et 1) et b tels que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{u_{n+1} = au_n + b}$, on dit que (u_n) est une **suite arithmético-géométrique**.

Dans ce cas, on appelle **point fixe** le réel α tel que $\boldsymbol{\alpha = a\,\alpha + b}$.

La suite $\mathbf{v_n = u_n - \boldsymbol{\alpha}}$ est alors **géométrique de raison a**.

_ S'il existe deux réels a et b tels que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n}$, alors on dit que (u_n) est une **suite linéaire récurrente d'ordre 2 à coefficients constants**.

Dans ce cas, on appelle **équation caractéristique** l'équation : $\mathbf{x^2 = ax + b}$.

Soit Δ le discriminant de cette équation.

_ si $\Delta > 0$: soient x_1 et x_2 les deux solutions de l'équation.

Alors il existe deux réels λ et μ tels que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{u_n = \lambda\, x_1^n + \mu\, x_2^n}$.

_ si $\Delta = 0$: soit x_0 la solution de l'équation.

Alors il existe deux réels λ et μ tels que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{u_n = (\lambda n + \mu)x_0^n}$.

Exemples :

1) Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = -2u_n + 3 \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \end{cases}$.

Déterminer l'expression de u_n en fonction de n.

(u_n) est une suite arithmético-géométrique.

Point fixe : $\alpha = -2\alpha + 3 \quad 3\alpha = 3 \quad \alpha = 1$

$v_n = u_n - 1$ est géométrique de raison -2. $v_n = v_0 \times (-2)^n$ avec $v_0 = u_0 - 1 = 3$

$u_n - 1 = (-2)^n \times 3 \qquad u_n = 1 + (-2)^n \times 3$.

2) Soit (u_n) la suite définie par : . $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 0 \\ u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \end{cases}$.

Déterminer l'expression de u_n en fonction de n.

(u_n) est une suite linéaire récurrente d'ordre 2 à coefficients constants.

Equation caractéristique : $x^2 = x + 2 \qquad x^2 - x - 2 = 0$

-1 racine évidente : $(x + 1)(x - 2) = 0$. $\quad x = -1$ ou 2

Donc il existe λ et μ tels que : $u_n = \lambda(-1)^n + \mu \times 2^n$

$\begin{cases} u_0 = \lambda + \mu = 1 \\ u_1 = -\lambda + 2\mu = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\mu = 1 \\ \lambda = 2\mu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = 1/3 \\ \lambda = 2/3 \end{cases}$ Donc $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{2}{3}(-1)^n + \frac{1}{3} 2^n$.

Remarque :

Soit (u_n) une suite. S'il existe un réel $q > 0$ tel que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{u_{n+1} \leq q.u_n}$, alors on peut montrer par récurrence que : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{u_n \leq q^n u_0}$ (ou similaire)

2.2 Majorant, minorant, sens de variation

Rappels :

Une suite (u_n) est majorée s'il existe un réel M tel que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq M$.

Une suite (u_n) est minorée s'il existe un réel m tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq m$.

Une suite (u_n) est croissante si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq u_n$.

Une suite (u_n) est décroissante si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq u_n$.

Pour étudier le sens de variation d'une suite, on étudie en général le **signe de $u_{n+1} - u_n$**

Ex : Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ la suite définie par : $\forall\, n \geq 1$, $u_n = \frac{2^n}{n!}$. Etudier le sens de variation de (u_n).

$\forall n \geq 1$, $u_{n+1} - u_n = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} - \frac{2^n}{n!} = \frac{2^{n+1} - 2^n(n+1)}{(n+1)!} = \frac{2^n(2 - (n+1))}{(n+1)!} = \frac{2^n(1-n)}{(n+1)!}$

$2^n \geq 0 \quad 1 - n \leq 0 \quad (n + 1)! \geq 0$ donc $u_{n+1} - u_n \leq 0$ donc la suite (u_n) est décroissante.

3. Limite d'une suite

Rappel : Valeur approchée :

Soit a et b des réels et $\varepsilon > 0$.
On dit que **b est une valeur approchée de a à ε près** si : $|\mathbf{b - a}| \leq \boldsymbol{\varepsilon}$ ($\Leftrightarrow b - \varepsilon \leq a \leq b + \varepsilon$).

En particulier $|u_n - L| \leq \varepsilon$ signifie que u_n est une valeur approchée de L à ε près.

3.1 Limites usuelles

Propriété :

Si $-1 < q < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$ si $q > 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$ si $q \leq -1$, (q^n) n'a pas de limite.

Propriété : (Croissances comparées)
voir chapitre 1

3.2 Théorèmes de convergence

Propriété : **Composée par une fonction continue**

Soit (u_n) une suite. Soit f une fonction définie sur un ensemble D, tel que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in D$.
Si $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbf{u_n = L}$ ($\in D$) et si **f est continue en L**, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbf{f(u_n) = f(L)}$.

Ex : $\lim\limits_{n \to +\infty} \exp\left(-\dfrac{1}{n^2}\right)$?

$\lim\limits_{n \to +\infty} -\dfrac{1}{n^2} = 0$ et exp est continue en 0 donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \exp\left(-\dfrac{1}{n^2}\right) = \exp(0) = 1$

Théorème de comparaison :

Soit (u_n) et (v_n) deux suites telles que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{u_n \leq v_n}$.
_ Si $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbf{u_n = +\infty}$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbf{v_n = +\infty}$
_ Si $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbf{v_n = -\infty}$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbf{u_n = -\infty}$.

Propriété : "Passage à la limite dans une inégalité"

Soit (u_n) et (v_n) deux suites telles que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{u_n \leq v_n}$.
Si (u_n) et (v_n) admettent des limites réelles, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbf{u_n} \leq \lim\limits_{n \to +\infty} \mathbf{v_n}$.

Remarques :
_ Attention, pour utiliser cette propriété, il faut avoir auparavant montré que (u_n) et (v_n) convergent.
_ Si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n < v_n$, on a seulement l'inégalité large sur les limites : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n \leq \lim\limits_{n \to +\infty} v_n$.

Ex : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < \dfrac{1}{n}$ et les limites sont les mêmes

Théorème d'encadrement (ou théorème des gendarmes)

Soient u, v, w trois suites telles que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{v_n \leq u_n \leq w_n}$.
S'il existe un réel L tel que $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbf{v_n} = \lim\limits_{n \to +\infty} \mathbf{w_n = L}$,
alors la suite **(u_n) est convergente** et $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbf{u_n = L}$.

Propriété de la limite monotone :

_ Toute suite **croissante** et **majorée** (par une constante) converge.
_ Toute suite **croissante** et **qui ne converge pas** tend vers + ∞.
_ Toute suite **décroissante** et **minorée** (par une constante) converge.
_ Toute suite **décroissante** et **qui ne converge pas** tend vers - ∞.

Remarque :
Si (u_n) est croissante et majorée par un réel M, alors (u_n) converge vers un réel L tel que $L \leq M$.
Si (u_n) est décroissante et minorée par un réel m, alors (u_n) converge vers un réel L tel que $L \geq m$.

Définition :

Deux suites (u_n) et (v_n) sont **adjacentes** si :
(1) (u_n) est **croissante**
(2) (v_n) est **décroissante**
(3) $\lim\limits_{n \to +\infty} (v_n - u_n) = 0$

Propriété :

Si deux suites (u_n) et (v_n) sont **adjacentes**, alors elles **convergent** toutes les deux, et ont la **même limite**.

Propriété : Suites extraites

Soit (u_n) une suite. Soit L un réel ou - ∞ ou + ∞.
_ Si **(u_n) tend vers une limite L (finie ou infinie)**, alors les suites **(u_{n+1}), (u_{2n}), (u_{2n+1}) tendent vers L**
_ Si les suites **(u_{2n})** et **(u_{2n+1})** tendent vers une **même limite L** (finie ou infinie), alors la suite **(u_n) tend aussi vers L**.

4. Suites récurrentes ($u_{n+1} = f(u_n)$)

Dans cette partie, on considère une fonction f définie sur un intervalle I et une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} \mathbf{u_0 \in I} \\ \forall\, \mathbf{n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)} \end{cases}$$

4.1 Suites majorées, minorées, variations

Pour montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq A$ (ou $u_n > A$, $u_n \leq A$, $A \leq u_n \leq B$, …), on procède en général **par récurrence**.

Pour l'hérédité, on peut :
_ soit **utiliser les règles sur les inégalités** si l'expression est simple (une seule fois u_n dans l'expression)
_ soit **utiliser le sens de variation de f** : (si plusieurs fois u_n dans l'expression)
Ex : si $u_n \geq A$ et f croissante, alors $f(u_n) \geq f(A)$
_ soit étudier le **signe de $u_{n+1} - A$**

Rappel : On peut additionner deux inégalités, mais on ne peut pas :
_ soustraire deux inégalités
_ multiplier deux inégalités (sauf si tout est positif)
_ diviser deux inégalités

Exemple :

Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 4 \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{5u_n - 9}{u_n - 1}. \end{cases}$

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geq 3$.

On procède par récurrence :
_ $u_0 = 4$ donc u_0 existe et $u_0 \geq 3$
_ supposons qu'à un rang n, u_n existe et $u_n \geq 3$:
_ $u_n \geq 3$ donc $u_n \neq 1$ donc u_{n+1} existe.
($u_n \geq 3 \Rightarrow 5u_n - 9 \geq 6$ et $u_n - 1 \geq 2 \Rightarrow$ impasse)
_ On pose $f(x) = \dfrac{5x - 9}{x - 1}$ sur $[3; +\infty[$.

f est dérivable sur $[3; +\infty[$ et $\forall\, x \geq 1$, $f'(x) = \dfrac{5(x-1) - (5x-9)}{(x-1)^2} = \dfrac{4}{(x-1)^2} > 0$.

Donc f est croissante sur $[3; +\infty[$.

Comme $u_n \geq 3$, on a donc : $f(u_n) \geq f(3)$ $\quad f(3) = \dfrac{6}{2} = 3 \quad$ $u_{n+1} \geq 3$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geq 3$.

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
On dit que l'intervalle **I est stable par f** si **f(I) $\subset$ I**. (c'est-à-dire $\forall$ **x $\in$ I, f(x) $\in$ I**)

Remarque :
Si **$u_0 \in I$** et si **I est stable par f**, alors on peut montrer par récurrence que $\forall$ **n $\in \mathbb{N}$, $u_n \in I$**. (si $u_n \in I$ alors $f(u_n) \in I$ (car I stable par f) donc $u_{n+1} \in I$).

Variations :
Pour montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq u_n$ (ou $u_{n+1} \leq u_n$), on peut procéder **par récurrence** :
Ex : si $u_n \leq u_{n+1}$ et si f croissante, on a : $f(u_n) \leq f(u_{n+1})$ donc $u_{n+1} \leq u_{n+2}$

Attention, le sens de variation de f et celui de (u_n) ne sont pas forcément les mêmes !

Ex : suite de l'exemple précédent : Montrer que (u_n) est décroissante.

On montre par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq u_n$:
_ pour n = 0 : $u_0 = 4$ $u_1 = \frac{11}{3}$ $\frac{11}{3} \leq \frac{12}{3}$ donc $u_1 \leq u_0$
_ supposons qu'à un certain rang n, $u_{n+1} \leq u_n$
f est croissante sur $[3; +\infty[$ donc $f(u_{n+1}) \leq f(u_n)$ $u_{n+2} \leq u_{n+1}$.
Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq u_n$. La suite est décroissante.

De manière générale, on peut retenir la propriété suivante :

Propriété

Soit f une fonction définie sur un intervalle I tel que I est stable par f.
Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite définie par : $\begin{cases} u_0 \in I \\ u_{n+1} = f(u_n) \ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$
Si **f est croissante** sur I, alors la suite **(u_n) est monotone**.

Remarques :
_ donc, si f croissante sur I et si $u_0 \leq u_1$, la suite (u_n) est croissante
si f croissante sur I et si $u_0 \geq u_1$, la suite (u_n) est décroissante
_ si f est décroissante, alors (u_n) n'est pas monotone. Les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones, de sens de variation opposé.

4.2 Point fixe

Rappel : Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
On appelle **point fixe de f** tout $x \in I$ tel que $\mathbf{f(x) = x}$.

Remarque : Dans le cas d'une suite récurrente ($u_{n+1} = f(u_n)$), si **u_0 est un point fixe de f**, alors la suite **(u_n) est constante**.

Théorème du pont fixe :

Soit f est une fonction continue sur un intervalle I tel que $f(I) \subset I$ (I est stable par f).

Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 \in I \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.

Si **(u_n) converge vers un réel L**, alors **L est un point fixe de f** (c'est-à-dire $f(L) = L$).

(Les seules limites réelles possibles sont les points fixes de f).

Remarque : Ce théorème permet en particulier de trouver la valeur de la limite, après avoir montré que la suite converge, par propriété de la limite monotone par exemple.

Exemple :

1) Soit (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{2} \end{cases}$. On admet que (u_n) est décroissante et minorée par 0.

Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.

Comme elle est décroissante et minorée, elle converge vers un réel L.

D'après le théorème du point fixe, $L = \dfrac{L^2}{2} \quad 2L = L^2 \quad L(L-2) = 0$

$L = 0$ ou $L = 2$ (impossible car $u_0 = 1$ et (u_n) décroissante). Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

2) Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n} \end{cases}$. On admet que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 1$ et (u_n) croissante.

Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Si (u_n) converge vers un réel L, alors $L = L + \dfrac{1}{L}$ donc $\dfrac{1}{L} = 0$ impossible.

(u_n) est croissante et ne converge pas, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

4.3 Inégalité des accroissements finis

Utilisation de l'Inégalité des accroissements finis : (Méthode à connaitre)

Si : _ f admet un **point fixe $\alpha \in I$**

_ $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{u_n \in I}$

_ f est dérivable sur I et il existe un réel K tel que : $\forall$ **$x \in I$, $|f'(x)| \leq K$**

Alors, d'après l'I.A.F.,

$$|f(u_n) - f(\alpha)| \leq K\,|u_n - \alpha| \text{ donc } \mathbf{|u_{n+1} - \alpha| \leq K\,|u_n - \alpha|}$$

Ensuite, on peut montrer par récurrence que

$$\forall n \geq p,\ \mathbf{|u_n - \alpha| \leq K^{n-p}\,|u_p - \alpha|} \text{ (ou équivalent)}$$

On a donc $0 \leq |u_n - \alpha| \leq K^n\,|u_0 - \alpha|$

Si de plus, si $0 < K < 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} K^n\,|u_0 - \alpha| = 0$.

On a alors, d'après le théorème des gendarmes :

$$\lim_{n \to +\infty} |u_n - \alpha| = 0, \text{ donc } \lim_{n \to +\infty} u_n = \alpha.$$

Remarques :

_ dans ces conditions, (u_n) tend bien vers un point fixe de f.

_ attention, pensez à **vérifier les intervalles** : si $\forall$ **$x \in I$**, $|f'(x)| \leq K$, il faut vérifier que **$\alpha \in I$** et **$u_n \in I$**.

_ On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq K^n\,|u_0 - \alpha|$

Soit $\varepsilon > 0$.

Pour que **u_n soit une valeur approchée de α à ε près** ($\Leftrightarrow |u_n - \alpha| \leq \varepsilon$), **il SUFFIT que $K^n\,|u_0 - \alpha| \leq \varepsilon$**.

Il reste à résoudre cette inéquation.

Exemple :

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x^2/2}$.

On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

On admet que : _ $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0;1]$

_ l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution λ sur l'intervalle $[0;1]$.

_ $\forall x \in [0;1]$, $|f'(x)| \le \frac{1}{\sqrt{e}}$.

1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \lambda| \le \frac{1}{\sqrt{e}}|u_n - \lambda|$.

2) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \lambda| \le \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^n$. En déduire la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

3) Déterminer un rang n_0 à partir duquel u_n est une valeur approchée de λ à 10^{-3} près.

1) $u_n \in [0;1]$, $\lambda \in [0;1]$ et $\forall x \in [0;1]$, $|f'(x)| \le \frac{1}{\sqrt{e}}$, donc d'après l'I.A.F. :

$|f(u_n) - f(\lambda)| \le \frac{1}{\sqrt{e}}|u_n - \lambda| \quad |u_{n+1} - \lambda| \le \frac{1}{\sqrt{e}}|u_n - \lambda|$

2) Par récurrence : _ $|u_0 - \lambda| = |-\lambda| = \lambda \quad \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^0 = 1 \quad \lambda \le 1$ donc vrai au rang 0.

_ supposons que : $|u_n - \lambda| \le \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^n$ alors $|u_{n+1} - \lambda| \le \frac{1}{\sqrt{e}}|u_n - \lambda| \le \frac{1}{\sqrt{e}} \times \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^n = \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^{n+1}$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \le |u_n - \lambda| \le \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^n$

$-1 < \frac{1}{\sqrt{e}} < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^n = 0$ d'après le théorème des gendarmes : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lambda$.

3) Pour que $|u_n - \lambda| \le 10^{-3}$, il suffit que : $\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^n \le 10^{-3}$

$\Leftrightarrow (\sqrt{e})^n \ge 10^3 \Leftrightarrow n\ln(\sqrt{e}) \ge 3\ln(10) \Leftrightarrow \frac{n}{2}\ln(e) \ge 3\ln(10) \Leftrightarrow n \ge 6\ln(10)$ $(\approx 13{,}82)$ $n_0 = 14$ convient.

5. Suites implicites

Principe :
Soit f une fonction et (v_n) une suite connue.
Si $\forall n \in \mathbb{N}$, l'équation $f(x) = v_n$ admet une unique solution, alors en appelant **u_n cette solution**, **on définit une suite (u_n), dont on n'a pas l'expression**, mais que l'on souhaiterait étudier.

Méthodes :
_ **pour comparer u_n à un réel**, **on compare les images**, et on utilise le sens de variation de f.

_ pour trouver une **relation d'égalité sur u_n**, on part de la formule **$f(u_n) = v_n$**. (c'est la seule égalité qu'on ait sur u_n !)

_ pour étudier le sens de variation de u_n, **on compare $f(u_n)$ et $f(u_{n+1})$**, et on utilise le sens de variation de f.

_ si f réalise une bijection d'un intervalle I sur un intervalle J, alors f admet une application réciproque f^{-1} de J sur I. Dans ce cas, **$f(u_n) = v_n \Leftrightarrow u_n = f^{-1}(v_n)$**.
Cette expression permet de trouver certaines propriétés sur u_n.

_ comme il n'y a pas de relation de récurrence entre u_n et u_{n+1}, **toute démonstration par récurrence est impossible** sur des suites implicites. (pas de théorème du point fixe non plus)

Exemple :
On a vu (chapitre 2) que la fonction $f(x) = e^x - x$ avait le tableau de variations suivant :

x	0 $\qquad$ $+\infty$
f(x)	1 $\nearrow$ $+\infty$

1) Montrer qu'il existe une unique suite (u_n) d'éléments de $[0; +\infty[$ telle que :
$\forall n \in \mathbb{N}, f(u_n) = e^n$.
2) Etudier le sens de variation de (u_n).
3) Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}, n \leq u_n$. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.
4) Montrer que $e^{u_n} \sim_{+\infty} e^n$. En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n - n) = 0$.

1) f est continue et strictement croissante sur $[0; +\infty[$. De plus $\forall n \in \mathbb{N}$, $e^n \in [1; +\infty[$, donc d'après le théorème de la bijection, il existe un unique $u_n \in [0; +\infty[$ tel que $f(u_n) = e^n$.
2) $\forall\, n \in \mathbb{N}, f(u_n) = e^n \quad f(u_{n+1}) = e^{n+1}$
$n + 1 \geq n$ donc $e^{n+1} \geq e^n \quad f(u_{n+1}) \geq f(u_n)$ et f strictement croissante donc $u_{n+1} \geq u_n$. (u_n) est croissante.
3) $f(n) = e^n - n \quad f(u_n) = e^n$ donc $f(n) \leq f(u_n)$ et f strictement croissante donc $n \leq u_n$.
$\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$ donc par comparaison $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.
Ou : f admet une application réciproque f^{-1}. $f(u_n) = e^n \Leftrightarrow u_n = f^{-1}(e^n)$
$\lim\limits_{n \to +\infty} e^n = +\infty$
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f^{-1}(x) = +\infty$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} f^{-1}(e^n) = +\infty$.
4) $f(u_n) = e^n$ donc $e^{u_n} - u_n = e^n \quad \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ donc $e^{u_n} - u_n \sim_{+\infty} e^{u_n}$
Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{e^{u_n}}{e^n} = 1 \quad \lim\limits_{n \to +\infty} e^{u_n - n} = 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n - n = \ln(1) = 0$.
(donc $u_n - n =_{+\infty} o(1) \qquad u_n =_{+\infty} n + o(1)$

Remarque : (Limite programme)
Soit f_n une fonction qui dépend d'un entier naturel n.
Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, **l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution** u_n sur un intervalle I, on définit également une suite implicite (u_n).
Les méthodes sont les mêmes que précédemment, en remplaçant f par f_n, sauf pour le sens de variation.

Etude du **sens de variation** :
_ on **compare $f_n(x)$ et $f_{n+1}(x)$** pour $x \in I$ et on déduit une inégalité entre $f_{n+1}(u_n)$ et $f_n(u_n)$
_ or **$f_n(u_n) = 0 = f_{n+1}(u_{n+1})$** donc on déduit une inégalité entre $f_{n+1}(u_n)$ et $f_{n+1}(u_{n+1})$
_ on conclue en utilisant le sens de variation de f_{n+1}.

Ex : Soit $n \geq 1$. Soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = e^x + nx - 2$.
On admet que la fonction f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution u_n sur $\mathbb{R}^+$.
Montrer que $\forall x \in [0; +\infty[$, $f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$. En déduire que la suite (u_n) est décroissante.

$f_{n+1}(x) - f_n(x) = x$ donc $\forall x \geq 0$, $f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$
$u_n \geq 0$ donc $f_{n+1}(u_n) \geq f_n(u_n)$ $\quad f_{n+1}(u_n) \geq 0 \quad f_{n+1}(u_n) \geq f_{n+1}(u_{n+1})$
f_{n+1} strictement croissante donc $u_n \geq u_{n+1}$. Donc (u_n) est décroissante.