Exercice 1

On rappelle que pour tout réel u, [u] désigne la partie entière de u, c'est-à-dire le nombre entier vérifiant :

$[u] \leq u < [u] + 1$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Déterminer la limite de $\dfrac{[nx]}{n}$.

Exercice 2 - Méthode de la partie principale

On admet le résultat suivant : (Théorème de Césaro)

Si une suite $(u_n)_{n \geq 1}$ converge vers un réel L alors la suite $\dfrac{u_0 + ... + u_{n-1}}{n}$ converge aussi vers L.

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $f(x) - x \sim_0 - \alpha x^2$.

Soit (u_n) une suite définie par : $\begin{cases} u_0 > 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ et que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n}$.

1) a) Montrer que $u_{n+1} \sim_{+\infty} u_n$.

b) Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \alpha$. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=0}^{n-1} v_k$.

2) Montrer que $\sum\limits_{k=0}^{n-1} v_k \sim_{+\infty} \dfrac{1}{u_n}$. En déduire que $u_n \sim_{+\infty} \dfrac{1}{\alpha n}$

Exercice 3 – Suite récurrente et sens de variation de la fonction sous-jacente

On considère une fonction f définie sur un intervalle I tel que $f(I) \subset I$.

Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 \in I \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

Soit g la fonction définie sur I par : $\forall x \in I$, $g(x) = f(x) - x$.

1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I$.

2) Dans cette question, on suppose que f est croissante sur I.

a) Montrer que si $g(u_0) > 0$ alors (u_n) est croissante.

b) Que se passe-t-il si $g(u_0) < 0$?

3) Dans cette question, on suppose que f est décroissante sur I.

On définit les suites $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} v_n = u_{2n} \\ w_n = u_{2n+1} \end{cases}$

On pose également $h = f \circ f$.

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = f(v_n)$, $v_{n+1} = h(v_n)$ et $w_{n+1} = h(w_n)$.

b) En déduire que les suites (v_n) et (w_n) sont toutes les deux monotones, de sens de variation opposés.

4) Un exemple : Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et la relation $u_{n+1} = \dfrac{1}{1 + u_n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0;1]$

b) Montrer que les suites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont convergentes.

c) Résoudre dans [0;1] l'équation $\dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{1 + x}} = x$.

d) En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et donner sa limite.