Chapitre 3 : Les suites – Feuille n°2

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par : $\forall x \geq 0$, $f(x) = \dfrac{1}{2+x}$.

Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.

1) Montrer que (u_n) est bien définie et que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$.

2) Montrer que (u_n) a une seule limite réelle possible L, que l'on déterminera.

3) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - L| \leq \left(\dfrac{1}{4}\right)^n |u_0 - L|$. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

4) En remarquant que $L \leq 1$, déterminer un rang n pour lequel u_n est une valeur approchée de L à 10^{-4} près.

Exercice 2

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = x + \ln(x)$.

1. Pour $n \in \mathbb{N}$ quelconque, montrer que l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution x_n.
2. Montrer que la suite (x_n) est croissante.
3. a) Montrer que $\forall n \geq 1$, $x_n \leq n$, puis que $\forall n \geq 1$, $n - \ln(n) \leq x_n$

b) En déduire la limite, puis un équivalent de (x_n) en $+\infty$.

4. Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n - n = -\infty$.

Exercice 3

Soit, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, f_n la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f_n(x) = n.x + \ln(x)$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ a une unique solution x_n sur $]0; +\infty[$ et que $x_n \in]0;1]$.
2. Déterminer x_0.
3. a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in]0,+\infty[$: $f_{n+1}(x) > f_n(x)$

b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_{n+1}(x_n) > 0$ puis que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante

4. a) Montrer que (x_n) converge.

b) On admet que $\forall x \in]0; +\infty[$, $x - \ln(x) > 0$.

Montrer que $\forall n \geq 1$, $x_n \leq \dfrac{1}{\sqrt{n}}$. En déduire la limite de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

c) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} n.x_n$.

Exercice 4 (en plus)

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3 et f_n l'application définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f_n(x) = x^n - n.x + 1$$

1°) Montrer l'existence de deux réels a_n et b_n vérifiant : $0 < a_n < 1 < b_n$ et $f_n(a_n) = f_n(b_n) = 0$.

2°) Etude de la suite (a_n) :

a) Montrer que $\forall x \in [0;1]$, $f_{n+1}(x) - f_n(x) \leq 0$.

En déduire le signe de $f_{n+1}(a_n)$ et en déduire que la suite (a_n) est décroissante.

b) Montrer que $\forall n \geq 3$, $a_n = \dfrac{1 + a_n^{\,n}}{n}$. En déduire, à l'aide d'un encadrement que $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0$.

c) Montrer que (a_n) est équivalent à 1/n.